Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

67. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. APRIL 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

67. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Behrend, F. A., Uniformizability and compactifiability of topological spaces . . . 203
Jurkat, W. B., Über die Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes mit funktionentheoretischen Methoden 211
Grunsky, H., Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. II 223
Ludford, G. S. S., and S. H. Schot, On Sonic Limit Lines in the Hodograph Method 229
Schäfke, F. W., Integrale über Produkte von Sphäroidfunktionen 238
Schäfke, F. W., Bemerkungen über Variationsrechnung, implizite Funktionen und Lagrangesche Multiplikatoren 252
Eichler, M., Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale 267
Schmidt, J., Einfacher, ordinalzahlfreier Beweis für die Wohlordnung der Mächtigkeiten 299

BEHREND, F. A.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 203—210 (1957)

Uniformizability and compactifiability of topological spaces

By
F. A. BEHREND

In the following we give some necessary and sufficient conditions for the uniformizability of a topological space. The criteria (§ 2) and the proofs (§ 3) remain within the topological space S; no appeal is made to mappings of S into other spaces; in particular, no use is made of the real numbers. As a topological space is compactifiable if and only if it is a uniformizable T_0-space, each criterion obtained, together with the condition that S be a T_0-space, gives a criterion for compactifiability. The compactification can be carried out either by applying the classical Cauchy completion procedure[1]) to S provided with a totally bounded uniform structure as obtained in § 3.3 or 3.6[2]), or by P. Samuel's construction[3]), or, more directly, by an adaptation of the process used by A. Gerolini[4]) which is sketched in § 4. The compactifiability of regular spaces with a normal base as studied by K. Fan and N. Gottesman[5]) is a simple consequence of criterion (II) (§ 4, note; of the three properties of a normal base, only one is essential).

§ 1. Notations

S is a topological space; x, y, z denote points, A, B, X, Y, Z subsets of S, $\bar{A}$ the closure of A, $\mathring{A}$ its interior, $\complement A$ its complement. Two sets A, B are compatible if $A \cap B \neq O$; a set A and a filter φ are compatible if A is compatible with every $X \in \varphi$; two filters φ, ψ are compatible if every $X \in \varphi$ is compatible with every $Y \in \psi$. An open filter is a filter with a basis of open sets.

By a *string* σ will be understood a family of subsets of S with the following properties:

(i) if $Z \in \sigma$ then Z is either open or closed,

[1]) See, e.g., BOURBAKI, N.: Élements de Mathématique, Première Partie, Livre III, Chap. II, § 3, no. 5. Paris 1951.

[2]) See also BEHREND, F. A.: Note on the compactification of separated uniform spaces. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A59 = Indagationes Math. **18**, 269—270 (1956).

[3]) Ultrafilters and compactification of uniform spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 100—132 (1948).

[4]) Compactification des espaces séparés. C. R. Acad. Sci. Paris **232**, 1056—1058 (1951).

[5]) On compactifications of FREUDENTHAL and WALLMAN. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **55** = Indagationes Math. **14**, 504—510 (1952).

(ii) σ is fully ordered with respect to the inclusion relation $\subset$; it has a least element A and a greatest element B; A is closed and B is open;

(iii) if $A_1 \in \sigma$ is closed, $B_1 \in \sigma$ open, and $A_1 \subset B_1$, then there exists a closed $A_2 \in \sigma$ and an open $B_2 \in \sigma$ such that $A_1 \subset B_2 \subset A_2 \subset B_1$.

We note the following consequences of this definition:

(iv) if σ is a string with least element A and greatest element B, then the family σ' of all complements $\complement Z$ of the elements Z of σ is a string with least element $\complement B$ and greatest element $\complement A$;

(v) if σ is a string, $A_1 \in \sigma$ closed, $B_1 \in \sigma$ open, and $A_1 \subset B_1$, then the family σ' of all $Z \in \sigma$ with $A_1 \subset Z \subset B_1$ is a string with least element A_1 and greatest element B_1.

D, F, G, H, U, V, W denote subsets of $S \times S$; $F(x)$ is the set of all y with $(x, y) \in F$; $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$. We note the following

Lemma. For any $X \subset S$ and any symmetrical $F \subset S \times S$, $F(\complement F(X)) \subset \complement X$ [6].

§ 2. Criteria for uniformizability

It will be shown that the following four conditions (I)—(IV) are equivalent:

(I) *To any open neighbourhood $N(x)$ of any point $x \in S$ there exists a string σ of neighbourhoods of x with greatest element $N(x)$.*

Note. This condition replaces Bourbaki's axiom (O_{IV}) [7]) which characterizes uniformizability in terms of continuous real functions on S.

(II) *There exists a relation $<$ between subsets of S with the following properties:*

(II.1) if $A < B$ then $A \subset \mathring{B}$,

(II.2) if $A < B$ then there exist A_1, B_1 such that $A < B_1 \subset A_1 < B$,

(II.3) to any open neighbourhood $N(x)$ of any $x \in S$ there exists a neighbourhood $M(x)$ such that $M(x) < N(x)$,

(II.4) if $A < B$ then $\complement B < \complement A$.

Note 1. The following is a consequence of (II):

(II.5) if $A < B$ then $\bar{A} \subset \mathring{B}$.

Proof. By (II.2), $A < B_1 \subset A_1 < B$; by (II.1) and (II.4), $A_1 \subset \mathring{B}$, and $\complement B_1 < \complement A$, $\complement B_1 \subset \complement \mathring{\bar{A}} = \complement \bar{A}$, $\bar{A} \subset B_1$.

Note 2. (II) is equivalent to

(II*) *There exists a relation $<$ between subsets of S such that*

(II*.1) if $A < B$, then A is closed, B is open and $A \subset B$,

(II*.2) = (II.2),

(II*.3) = (II.3).

Proof. 1. Assume a relation $<$ satisfying (II) and define $A \ll B$ if and only if X, Y exist such that $X < Y$ and $A = \bar{X}$, $B = \mathring{Y}$. The relation $\ll$ then satisfies (II*): (II*.1) holds by definition and (II.5).

[6]) See loc. cit. [2]).

[7]) loc. cit. [1]), chap. IX, § 1, no. 5.

(II*.2) If $A \ll B$ then, by (II.2), $X < Y_1 < X_1 < Y$ whence, by (II.5), $\overline{X} < \mathring{Y}_1 < \overline{X_1} < \mathring{Y}$, and putting $A_1 = \overline{X_1}$, $B_1 = \mathring{Y}_1$, $A \ll B_1 < A_1 \ll B$.

(II*.3) Given any open $N(x)$ there exists, by (II.3), $M(x) < N(x)$, whence, by (II.5); $\overline{M(x)} \ll N(x)$.

2. Conversely, it will be shown in § 3.2 and 3.1 that (II*) implies (I) and (I) implies (II).

(III) *S is uniformizable.*

Note. The following condition is *sufficient* for the uniformizability of S: *There exists a family $\mathfrak{F} = \{F, G, H, \ldots\}$ of sets of $S \times S$ such that*

(III.1) if D is the diagonal of $S \times S$, then $D < F$ for every $F \in \mathfrak{F}$;

(III.2) $F = F^{-1}$ for every $F \in \mathfrak{F}$;

(III.3) to any $F \in \mathfrak{F}$ there exist $G, H \in \mathfrak{F}$ such that $(G \cap H)^2 < F$;

(III.4) to any open neighbourhood $N(x)$ of any $x \in S$ there exists $F \in \mathfrak{F}$ such that $N(x) = F(x)$, and, conversely, every $F(x)$ is a neighbourhood of x.

Proof. Let $\mathfrak{U}$ be the family of all finite intersections $U = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ $(n \geq 1)$ of sets $F_i \in \mathfrak{F}$; $\mathfrak{U}$ is a basis of entourages of a uniform structure of S, i.e.

(α) $\mathfrak{U}$ is a filter basis,

(β) $D < U$ for every $U \in \mathfrak{U}$,

(γ) $U = U^{-1}$ for every $U \in \mathfrak{U}$,

(δ) to any $U \in \mathfrak{U}$ there exists $V \in \mathfrak{U}$ such that $V^2 < U$.

(α), (β), (γ) obviously hold in virtue of (III.1) and (III.2). (δ) follows from (III.3): if $U = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ and $(G_i \cap H_i)^2 < F_i$, put $V = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \cap H_i)$.

It remains to show that the topology defined by $\mathfrak{U}$ is identical with the given topology of S, i.e.

(ε) (i) To every neighbourhood $M(x)$ there exist $U \in \mathfrak{U}$ such that $U(x) < M(x)$,

(ii) $U(x)$ is a neighbourhood of x for every $U \in \mathfrak{U}$.

(i) follows from (III.4) as $M(x)$ contains an open neighbourhood $N(x)$, and $N(x) = F(x)$ for some $F \in \mathfrak{F} < \mathfrak{U}$; (ii) follows from (III.4) as $U = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ implies $U(x) = \bigcap_{i=1}^{n} F_i(x)$ and every $F_i(x)$ is a neighbourhood of x.

(IV) *There exists in S a family Δ of filters with the following properties:*

(IV.1) the neighbourhood filter φ_x of any $x \in S$ belongs to Δ;

(IV.2) if $\xi \in \Delta$, $B \in \xi$ then there exists $A \in \xi$ such that every $\eta \in \Delta$ which is compatible with A contains B;

(IV.3) every open filter of S is compatible with a filter $\xi \in \Delta$.

Note 1. The A, B of (IV.2) satisfy $A < B$ and, more precisely, $\bar{A} < \mathring{B}$.

Proof. Any neighbourhood filter φ_x compatible with A contains B; but φ_x is compatible with A if (and only if) $x \in \bar{A}$; thus B is a neighbourhood of every $x \in \bar{A}$ whence $A < \mathring{B}$.

Note 2. Condition (IV.3) may be replaced by either of these:

(IV.3′) every filter of S is compatible with a filter $\xi \in \Delta$;

(IV.3″) every ultrafilter of S contains a filter $\xi \in \Delta$.

Proof. Clearly, (IV.3″) implies (IV.3′) and (IV.3′) implies (IV.3). It remains to show that (IV.3) implies (IV.3″). Let φ be any ultrafilter, φ' the open filter generated by the open sets of φ; by (IV.3) φ' is compatible with some $\xi \in \Delta$; we assert that $\xi < \varphi$ i.e. that $B \in \xi$ implies $B \in \varphi$. If $B \in \xi$, construct $A \in \xi$ by (IV.2); then, by Note 1, $A < \bar{A} < B$, and it suffices to show that $\bar{A} \in \varphi$. Suppose $\bar{A} \notin \varphi$; then, as φ is an ultrafilter, $\mathsf{C}\bar{A} \in \varphi$; as $\mathsf{C}\bar{A}$ is open, $\mathsf{C}\bar{A} \in \varphi'$; but $\bar{A} \in \xi$, and this contradicts the compatibility of φ' and ξ.

Note 3. The following is a consequence of (IV):

(IV.4) If $\xi, \eta \in \Delta$, $\xi \neq \eta$, then ξ, η are incompatible.

Proof. Suppose ξ, η are compatible, and let B be any element of ξ. Construct $A \in \xi$ by (IV.2); as η is compatible with A, $B \in \eta$. Similarly every element of η is an element of ξ, i.e. $\xi = \eta$.

Note 4. Conditions (IV) together with the condition that S is a T_0-space are a simplified version of the conditions given by A. Gerolini[4]) for the compactifiability of S.

§ 3. Proof of the equivalence of (I) to (IV)

3.1. (I) implies (II)

Define $A < B$ if and only if there is a string with least element A and greatest element B. (II.1), (II.2), (II.4) hold in virtue of § 1 (ii)—(v), and (II.3) follows from (I).

3.2. (II) implies (I)

As (II) implies (II*) it is sufficient to show that (II*) implies (I). Given any open neighbourhood $N(x)$ of x, construct $M(x)$, by (II*.3), such that $M = M(x) < N(x) = N$. Using (II*.2), interpolate successively:

1. step: $M < N_1^1 \subset M_1^1 < N$,

2. step: $M < N_1^2 \subset M_1^2 < N_1^1 \subset M_1^1 < N_2^2 \subset M_2^2 < N$,

etc., defining, at the n-th step, M_i^n, N_i^n $(1 \leq i \leq 2^{n-1})$. By (II*.1) the family consisting of M, N and all M_i^n, N_i^n is a string of neighbourhoods of x with greatest element N.

3.3. (II) implies (III)

It is sufficient to show that (II*) implies (III). Define $\mathfrak{F}$ as the family of all F of the form

$$F = B \times B \cup \mathsf{C}A \times \mathsf{C}A \qquad \text{where } A < B.$$

We have to verify (III.1)—(III.4).

(III.1) $D < F$: as $A < B$, by (II*.1), $x \in S$ implies $x \in B$ or $x \in \mathsf{C}A$ whence $(x, x) \in F$.

(III.2) $F = F^{-1}$, as F is symmetrical by construction.

(III.3) Given $F = B \times B \cup \complement A \times \complement A$ where $A < B$, find A_1, B_1, by (II*.2) such that $A < B_1 \subset A_1 < B$ and define G, H by

$$G = B_1 \times B_1 \cup \complement A \times \complement A, \quad H = B \times B \cup \complement A_1 \times \complement A_1.$$

We assert that $(G \cap H)^2 \subset F$. Let $(x, y) \in (G \cap H)^2$. This means that z exists such that $(x, z) \in G \cap H$, $(z, y) \in G \cap H$. We have to show that $(x, y) \in F$. Suppose $(x, y) \notin F$. Then *either* $x \in B$ whence $y \notin B$, $y \in \complement A$, $x \notin \complement A$; *or* $x \in \complement A$, $y \notin \complement A$, $y \in B$, $x \notin B$. Because of the symmetry it is sufficient to consider the first case; as $x \notin \complement A$ and $(x, z) \in G$, $z \in B_1$; and as $y \notin B$ and $(z, y) \in H$, $z \in \complement A_1$; this is a contradiction, as $B_1 \cap \complement A_1 = O$.

(III.4) Given any open $N(x)$, find $M(x) < N(x)$ by (II*.3) and put $F = N \times N \cup \complement M \times \complement M$; as $x \notin \complement M$, $F(x) = N(x)$. — Conversely, if $F = B \times B \cup \complement A \times \complement A$, $A < B$, then B and $\complement A$ are open by (II*.1), and as $F(x)$ is B or $\complement A$ or S, it is a neighbourhood of x.

3.4. (III) implies (II)

Let $\mathfrak{U}$ be the filter of entourages of the given uniform structure of S and define

$A < B$ if and only if there exists $U \in \mathfrak{U}$ such that $U(A) \cap U(\complement B) = O$. We have to verify (II.1)—(II.4).

(II.1) If $A < B$, then $A \subset U(A) \subset \complement U(\complement B) \subset \complement\complement B = B$, and as $U(A)$ is a neighbourhood of A, $A \subset \mathring{B}$.

(II.4) If $A < B$, then $U(\complement B) \cap U(\complement\complement A) = O$, i.e. $\complement B < \complement A$.

(II.2) If $A < B$, i.e. $U(A) \cap U(\complement B) = O$, choose a symmetrical V such that $V^2 \subset U$. Put $B_1 = V^2(A)$; then, by the Lemma of § 1,

$$V(\complement B_1) = V(\complement V^2(A)) \subset \complement V(A), \quad \text{i.e.} \quad V(A) \cap V(\complement B_1) = O,$$

whence $A < B_1$. — Similarly, starting with $\complement B < \complement A$ we get $\complement B < \complement A_1$ where $\complement A_1 = V^2(\complement B)$, and hence $A_1 < B$. It follows that $B_1 \subset A_1$, i.e. $B_1 \cap \complement A_1 = O$ because

$$B_1 \cap \complement A_1 = V^2(A) \cap V^2(\complement B) \subset U(A) \cap U(\complement B) = O.$$

(II.3) Let $N(x)$ be any neighbourhood of x; then $N(x) = U(x)$ for some $U \in \mathfrak{U}$; choose a symmetrical $V \in \mathfrak{U}$ such that $V^3 \subset U$, and put $M(x) = V(x)$; then, as $V^3(x) \subset U(x) = N$, $\complement N \subset \complement V^3(x)$ and

$$V(\complement N) \subset V(\complement V^3(x)) \subset \complement V^2(x) = \complement V(M),$$

by the Lemma of § 1, i.e. $V(M) \cap V(\complement N) = O$ whence $M < N$.

3.5. (III) implies (IV)

As above, let $\mathfrak{U}$ be the filter of entourages. The envelope φ^* of any ultrafilter φ of S is the filter generated by the sets $U(X)$ where $U \in \mathfrak{U}$, $X \in \varphi$. Let Δ be the family of all φ^*.

(IV.3″) is satisfied as $\varphi^* \subset \varphi$, and it remains to verify (IV.1), (IV.2).

(IV.1) For any $x \in S$ let φ be the ultrafilter generated by $\{x\}$. Every $X \in \varphi$ contains x, hence every $U(X)$ is a neighbourhood of x. On the other hand every neighbourhood $N(x)$ of x is of the form $U(x) = U(\{x\})$. Hence φ^* is identical with the neighbourhood filter φ_x of x, i.e. $\varphi_x \in \Delta$.

(IV.2) Let $\varphi^* \in \Delta$, $B \in \varphi^*$, i.e. $B \supset U(X)$, $U \in \mathfrak{U}$, $X \in \varphi$. Choose a symmetrical $V \in \mathfrak{U}$ such that $V^3 \subset U$ and let $A = V(X)$; then $A \in \varphi^*$. Let $\psi^* \in \Delta$ be compatible with $A = V(X)$; we assert that $V^2(X) \in \psi$ whence $V^3(X) \in \psi^*$ and, as $V^3(X) \subset U(X) \subset B$, $B \in \psi^*$. Suppose $V^2(X) \notin \psi$; then $\complement V^2(X) \in \psi$, whence $V(\complement V^2(X)) \in \psi^*$; by the Lemma of § 1, $V(\complement V^2(X)) \subset \complement V(X)$, whence $\complement V(X) = \complement A \in \psi^*$ which contradicts the compatibility of ψ^* with A.

3.6. (IV) implies (III)

Let Δ be a family of filters satisfying (IV). A family $\{A_1, \ldots, A_n\}$ of a finite number $n \geqq 1$ of subsets of S will be called a *special finite covering* (s.f.c.) of S if $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$ and if every $\xi \in \Delta$ has at least one A_i as element. Let $\mathfrak{U}$ be the family of all sets $U \subset S \times S$ of the form $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times A_i$ where $\{A_1, \ldots, A_n\}$ is any s.f.c. We verify the conditions (α)—(ε) as in § 2 (III).

(α) $\mathfrak{U}$ is a filter basis: $\{S\}$ is a s.f.c., hence $S \times S \in \mathfrak{U}$, i.e. $\mathfrak{U}$ is not empty; by definition $\mathfrak{U}$ does not contain the null-set O. If $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times A_i \in \mathfrak{U}$, $V = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \times B_j \in \mathfrak{U}$ put $C_{ij} = A_i \cap B_j$; then $\bigcup_{i,j} C_{ij} = S$; and as every $\xi \in \Delta$ contains an A_i and a B_j, it contains C_{ij} so that $\{C_{ij}\}$ is a s.f.c.; $W = \bigcup_{i,j} C_{ij} \times C_{ij}$ belongs to $\mathfrak{U}$ and satisfies $W \subset U \cap V$.

(β) $D \subset U$ for every $U \in \mathfrak{U}$, by definition.

(γ) $U = U^{-1}$ for every $U \in \mathfrak{U}$, by definition.

(δ) To any $U \in \mathfrak{U}$ there exists $V \in \mathfrak{U}$ such that $V^2 \subset U$.

Proof. Suppose there exists $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times A_i \in \mathfrak{U}$ such that for *no* $V \in \mathfrak{U}$, $V^2 \subset U$. Then for every $V \in \mathfrak{U}$, V^2 is compatible with $\complement U$. The intersections $V^2 \cap \complement U$ form a filterbasis in $S \times S$ generating a filter $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{F}$ is contained in an ultrafilter $\mathfrak{G}$. Clearly $\complement U \in \mathfrak{G}$ and $V^2 \in \mathfrak{G}$ for all $V \in \mathfrak{U}$.

The projections φ, ψ of $\mathfrak{G}$ (projecting $S \times S$ on the first and the second factor S) are ultrafilters of S. By (IV.3″) there exist $\xi, \eta \in \Delta$ such that $\xi \subset \varphi$ and $\eta \subset \psi$. We note that $P \in \xi$, $Q \in \eta$ implies $P \in \varphi$, $Q \in \psi$ and hence $P \times Q \in \mathfrak{G}$.

By definition, one $A_i \in \xi$. $A_i \notin \eta$, because $A_i \in \eta$ would imply $A_i \times A_i \in \mathfrak{G}$ whence $U \in \mathfrak{G}$, contradicting $\complement U \in \mathfrak{G}$. Hence $\xi \neq \eta$ and, by (IV.4), ξ, η are incompatible, i.e. there exist $X_1 \in \xi$, $X_2 \in \eta$ with $X_1 \cap X_2 = O$.

By (IV.2) and (IV) Note 1, there exist $Y_1 \in \xi$, $Y_2 \in \eta$, $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ such that every $\zeta \in \Delta$ compatible with Y_1 resp. Y_2 contains X_1 resp. X_2. Put $X_3 = \complement(Y_1 \cap Y_2)$.

$\{X_1, X_2, X_3\}$ is a s.f.c.; for $\bigcup_{i=1}^{3} X_i \supset Y_1 \cup Y_2 \cup \complement(Y_1 \cup Y_2) = S$; and if $\zeta \in \Delta$, then either $X_1 \in \zeta$ or $X_2 \in \zeta$ or ζ is incompatible with Y_1 and Y_2; in the last

case there exist $Z_1, Z_2 \in \zeta$ such that $Z_1 \cap Y_1 = Z_2 \cap Y_2 = O$, whence, putting $Z = Z_1 \cap Z_2$, $Z \in \zeta$, $Z \cap (Y_1 \cup Y_2) = O$, i.e. $Z < \complement(Y_1 \cup Y_2) = X_3$ and $X_3 \in \zeta$. Hence $V = \bigcup_{i=1}^{3} X_i \times X_i \in \mathfrak{U}$.

As $V^2 \in \mathfrak{G}$ and $Y_1 \times Y_2 \in \mathfrak{G}$, $V^2 \cap (Y_1 \times Y_2) \neq O$. Let $(y_1, y_2) \in V^2 \cap (Y_1 \times Y_2)$; then $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$, i.e. $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$, and $(y_1, y_2) \in V^2$, i.e. z exists such that $(y_1, z) \in V$, $(z, y_2) \in V$, which means that for some j, k

$$(y_1, z) \in X_j \times X_j, \quad (z, y_2) \in X_k \times X_k.$$

As $y_1 \in Y_1$, $y_1 \notin \complement(Y_1 \cup Y_2) = X_3$, and as $Y_1 < X_1$ and $X_1 \cap X_2 = O$, $y_1 \notin X_2$; hence $j = 1$, and similarly $k = 2$. But this gives the contradiction $z \in X_1$, $z \in X_2$.

(ε) (i) Let $N(x) = X_1$ be any neighbourhood of x. By (IV.1), (IV.2) and (IV) Note 1, there exists a neighbourhood $M(x) < N(x)$ such that every $\zeta \in \Delta$ compatible with M contains N; put $X_2 = \complement M$. $\{X_1, X_2\}$ is a s.f.c.; for $X_1 \cup X_2 = N \cup \complement M = S$: and, for any $\zeta \in \Delta$, either $X_1 \in \zeta$ or ζ is incompatible with M; in the last case there exists $Z \in \zeta$ such that $Z \cap M = O$, i.e. $Z < \complement M = X_2$ whence $X_2 \in \zeta$. Taking $U = X_1 \times X_1 \cup X_2 \times X_2$ we have $U \in \mathfrak{U}$ and $N(x) = U(x)$.

(ii) Let $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times A_i \in \mathfrak{U}$, $x \in S$; as the neighbourhood filter φ_x of x belongs to Δ, one $A_i \in \varphi_x$; hence A_i is a neighbourhood of x, and as $A_i < U(x)$, $U(x)$ is a neighbourhood of x.

Note. As the entourages $U \in \mathfrak{U}$ are defined by finite converings of S, the uniform structure is totally bounded.

§ 4. Compactifiability

As pointed out in the introduction, a topological space S can be embedded in a compact (= bicompact) space if and only if S is a T_0-space satisfying one of the conditions (I)—(IV). We sketch a proof following A. Gerolini[4]).

1. Let S be a subspace of the compact space T; it may be assumed that S is dense in T. S is a T_0-space. We show that S satisfies (IV) where Δ is the family of the traces ψ'_u on S of the neighbourhood filters ψ_u of the points $u \in T$.

(IV.1) If φ_x is the neighbourhood filter in S of any $x \in S$ then $\varphi_x = \psi'_x \in \Delta$.

(IV.2) Let $\xi \in \Delta$, $B \in \xi$; then $\xi = \psi'_u$ for some $u \in T$ and $B = R \cap S$ for some $R \in \psi_u$; as T is regular, there exist an open neighbourhood Q and a closed neighbourhood P of u such that $P < Q < R$; put $A = P \cap S$. Let $\eta \in \Delta$ be compatible with A; $\eta = \psi'_v$ for some $v \in T$. ψ_v is compatible with P (if $V \in \psi_v$ then $V \cap S \in \psi'_v$, $(V \cap S) \cap A \neq O$, whence $V \cap P \neq O$). This means that v adheres to P, and as P is closed $v \in P$; as Q is open and $P < Q < R$, R is a neighbourhood of v, i.e. $R \in \psi_v$ and $B = R \cap S \in \psi'_v = \eta$.

(IV.3′) Let φ be any filter of S. As T is compact, φ, considered as filter basis in T, has an adherent point $u \in T$; this means that φ is compatible with ψ_u and hence with $\psi'_u \in \Delta$.

2. Conversely, let S be a T_0-space with a family Δ of filters satisfying (IV).

Δ can be topologized by taking as a basis of open sets the family of all sets $\Omega_B \subset \Delta$ consisting of all $\xi \in \Delta$ with $B \in \xi$ where B is any open set of S. (A basis of closed sets is then given by the family of all sets $\Gamma_A \subset \Delta$ consisting of all $\eta \in \Delta$ compatible with A where A is any closed set of S.) Using (IV.4) and (IV.2), Δ is proved to be (i) a T_2-space, (ii) a regular space.

As S is a T_0-space, it follows, using (IV.1), that the map $x \to \varphi_x$ is a one-to-one map of S onto a subspace Σ of Δ, and it can easily be shown that the map is a homeomorphism of S on Σ, and that Σ is dense in Δ.

The proof is completed by showing that Δ is compact. Let $\mathfrak{F}$ be any filter of Δ, $\mathfrak{F}'$ the filter generated by the open sets of $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}''$ the trace of $\mathfrak{F}'$ on Σ. By the homeomorphism of Σ and S, $\mathfrak{F}''$ corresponds to an open filter φ of S which, by (IV.3), is compatible with a filter $\xi \in \Delta$. It is easily seen that ξ, considered as point of Δ, adheres to $\mathfrak{F}'$, and it follows from the regularity of Δ, that ξ adheres to $\mathfrak{F}$.

Note. Fan and Gottesman[5]) proved that a topological space S is compactifiable if S is regular and possesses a normal base, i.e. a base $\mathfrak{B}$ of open sets satisfying

(1) if A, $B \in \mathfrak{B}$ then $A \cap B \in \mathfrak{B}$,

(2) if $A \in \mathfrak{B}$ then $\complement \bar{A} \in \mathfrak{B}$,

(3) to any open $U \subset S$ and any $A \in \mathfrak{B}$ such that $\bar{A} \subset U$ there exists $B \in \mathfrak{B}$ such that $\bar{A} \subset B \subset \bar{B} \subset U$.

We show that conditions (1) and (2) are not required. Let S be a regular space with a base $\mathfrak{B}$ of open sets satisfying (3). Define

$X < Y$ if and only if Y is open, $X = \bar{A}$ for some $A \in \mathfrak{B}$, and $X \subset Y$.

As S is a T_0-space, it is sufficient to verify that the relation $<$ satisfies (II*). (II*.1) holds by definition.

(II*.2) If $X = \bar{A} < Y$, then there exists by (3) $B \in \mathfrak{B}$ such that

$$X = \bar{A} \subset B \subset \bar{B} \subset Y \quad \text{whence} \quad X < B \subset \bar{B} < Y.$$

(II*.3) Let $N(x)$ be an open neighbourhood of x. As S is regular, there exists a neighbourhood $M(x)$ such that $\overline{M(x)} \subset N(x)$; $M(x)$ contains a basic open neighbourhood $L(x) \in \mathfrak{B}$; as $\overline{L(x)} \subset N(x)$ we have $\overline{L(x)} < N(x)$.

Department of Mathematics, University of Melbourne

(Eingegangen am 3. September 1956)

JURKAT, W. B
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 211—222 (1957)

Über die Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes mit funktionentheoretischen Methoden

Von
W. B. JURKAT

Diese Note befaßt sich mit der Verfeinerung und der systematischen Untersuchung der in [6] aufgestellten Beweismethoden. Ausgangspunkt ist der Abelsche Stetigkeitssatz in der allgemeinen Form: Wenn eine (reelle oder komplexe) Reihe $\sum a_\nu$ gegen Null konvergiert oder allgemeiner für ein $k > -1$

$$(\mathrm{C,k}) \qquad S_n^{k+1}[a_\nu] = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k}{n-\nu} a_\nu = o(n^k) \qquad \text{für} \quad n \to \infty$$

ist, so gilt

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu & \text{konvergiert für } |z| < 1 \text{ und} \\ f(z) = o(1) & \text{für reelle } z \to 1 - 0. \end{cases}$$

Es gilt sogar $f(z) = o(1)$ für $z \to 1$ in jedem Winkelraum $|1-z| < M(1-|z|)$ mit $M > 1$. Die wichtigsten Umkehrungen rühren von LITTLEWOOD her [vgl. 2, Chap. VII]:

Satz I. (A) $\Rightarrow$ (C, 1), *falls* $s_n = S_n^1[a_\nu] = O(1)$.

Satz II. (A) $\Rightarrow$ (C, 0), *falls* $n a_n = O(1)$.

Jeder der Sätze kann aus dem anderen hergeleitet werden. Die zusätzlich auftretende Umkehrbedingung läßt sich erheblich verallgemeinern: Zum Beispiel genügt bei Satz II die Bedingung

$$(\mathrm{T}) \qquad s_{n'} - s_n = \sum_{n+1}^{n'} a_\nu = o(1) \qquad \text{für} \quad 1 < \frac{n'}{n} \to 1,$$

die zugleich notwendig für Konvergenz ist.

Will man Satz II mit der Bedingung (T) oder in noch allgemeinerer Form beweisen, so zeigt man im allgemeinen erst Beschränktheit, dann C-Limitierbarkeit (Satz I) und schließlich Konvergenz von s_n. Damit wird die Hauptschwierigkeit auf Satz I hinausgespielt, in den die allgemeine Umkehrbedingung gar nicht mehr eingeht. Der bisher einfachste Beweis für Satz I wurde von KARAMATA gegeben, und die Beweismethode ist unlängst von Wielandt so variiert worden, daß sie auch unmittelbar auf Satz II anwendbar wird [11], [5]. Die Methode kann durch das Stichwort Approximation gekennzeichnet werden.

Demgegenüber wurde in [6] ein neuer einfacher Beweis von Satz II und seinen Verallgemeinerungen angegeben, der ähnlich wie oben in drei Schritten vorgeht und sich vor allem auf die Cauchysche Koeffizientenformel stützt. Solange man allgemeine Umkehrbedingungen im Auge hat, erscheint eine solche Dreiteilung des Problems völlig angemessen. Es erhebt sich aber die Frage, ob sich der funktionentheoretische Beweis des speziellen Satzes II nicht ähnlich vereinfachen läßt wie das bei der Karamataschen Beweismethode der Fall war. Tatsächlich werden durch eine Variation der bisherigen funktionentheoretischen Methode die Sätze I und II einer direkten Behandlung zugänglich (§§ 2 und 3).

Der entscheidende Gedanke besteht in der Einführung allgemeinerer Umkehrbedingungen, die sich besser funktionentheoretisch erfassen lassen. Für jede solche Umkehrbedingung können alle Indizes k mit der Eigenschaft $(A) \Rightarrow (C, k)$ bestimmt werden. Es zeigt sich, daß zu jeder „arithmetischen" Umkehrbedingung eine „funktionentheoretische" Umkehrbedingung vorhanden ist, die die gleiche „Umkehrwirkung" hat. So entsteht eine Vielfalt von Umkehrsätzen, deren Gesamtheit vollständig aufgestellt wird (§ 7). Besonderes Interesse verdienen die extremen Umkehrbedingungen, unter die sich auch die früheren Ergebnisse einordnen lassen (§§ 5 und 6). Die neuen Methoden führen auch zu weiteren Anwendungen beim Borelschen Verfahren, auf die wir bei anderer Gelegenheit eingehen werden [vgl. 7].

1. Der Ansatzpunkt aller folgenden Beweise besteht in der funktionentheoretischen Formulierung der Umkehrbedingung. Bei Satz I handelt es sich um die Frage, was $s_n = O(1)$ für die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu \quad \text{mit} \quad z = r e^{i\varphi}, \quad 0 < r < 1, \ |\varphi| \leq \pi \tag{1}$$

bedeutet. Offenbar folgt

$$F(z) = O(1)\,(1-r)^{-1}, \tag{2}$$

aber dies folgt auch schon aus $\sum |s_\nu| r^\nu = O(1)\,(1-r)^{-1}$ und damit aus der schwächeren Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu| = O(n). \tag{3}$$

Übrigens ist allgemein für jedes $\gamma > 0$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu| = O(n^\gamma) \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu| r^\nu = O(1)\,(1-r)^{-\gamma}, \tag{4}$$

wie man durch eine einfache Überlegung erkennt $\left(\text{setze } r = 1 - \frac{1}{n}\right)$. Mit der Umkehrbedingung (3) statt $s_n = O(1)$ ist aber Satz I nicht mehr richtig, wie wir noch zeigen werden. Daher kommt es darauf an, aus $s_n = O(1)$ mehr herauszuholen wie z. B.

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu|^2 = O(n). \tag{5}$$

Dies ist nach (4) äquivalent mit $\sum |s_\nu|^2 r^\nu = O(1)(1-r)^{-1}$ und daher nach der Parsevalschen Gleichung mit

$$(6) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |F(r e^{i\varphi})|^2 d\varphi = 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu|^2 r^{2\nu} = O\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Die Bedingung (5) läßt sich also vollständig funktionentheoretisch ausdrücken[1]). Da (5) mehr verlangt als (3), so bedeutet auch (6) mehr als (2). Mit der Umkehrbedingung (6) bzw. (5) statt $s_n = O(1)$ läßt sich nun Satz I bereits beweisen, wie wir noch zeigen werden.

Es zeigt sich also, daß die Umkehrbedingung $s_n = O(1)$ zweckmäßig durch Bedingungen der Form

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu|^\varrho = O(n) \quad \text{mit} \quad \varrho \geqq 1$$

zu ersetzen ist, die besser funktionentheoretisch ausgedrückt werden können. Diese Bedingungen verlangen um so mehr, je größer ϱ ist, und gehen für $\varrho \to +\infty$ in die Bedingung $s_n = O(1)$ über. Nach der Ungleichung von Hausdorff-Young gilt für $1 < \varrho < +\infty$, $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^{\varrho'} d\varphi = O(1)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu r^\nu|^\varrho\right)^{\varrho'/\varrho} \quad \text{falls } \varrho \leqq 2$$

bzw.

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu r^\nu|^\varrho\right)^{\varrho/\varrho'} = O(1) \int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^{\varrho'} d\varphi \quad \text{falls } \varrho \geqq 2.$$

Daher entspricht der arithmetischen Bedingung (7) die funktionentheoretische Bedingung

$$(7') \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^{\varrho'} d\varphi = O(1)/(1-r)^{\varrho'-1},$$

die für $\varrho \leqq 2$ schwächer und für $\varrho \geqq 2$ stärker als (7) ist [im weiteren Sinn][2]).

Was hier über die Umkehrbedingung $s_n = O(1)$ gesagt wurde, gilt entsprechend für $n a_n = O(1)$, wobei man statt $F(z)$ die Funktion $z f'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu z^\nu$ zu betrachten hat. Wegen $(1-z)F(z) = f(z)$ lassen sich alle Umkehrbedingungen sowohl mit $F(z)$ als auch mit $f(z)$ ausdrücken. Will man dabei z durch r und φ ausdrücken, so ist die Abschätzung

$$(8) \qquad K_1|1-z| \leqq \operatorname{Max}(1-r, |\varphi|) \leqq K_2|1-z|$$

mit positiven Konstanten $K_{1,2}$ nützlich.

[1]) Für die Bedeutung der Parsevalschen Gleichung bei genauen Integralabschätzungen vgl. auch [8, Kap. I].

[2]) Nur für Vergleiche dieser Art wird im folgenden die Ungleichung von Hausdorff-Young benutzt werden. Die Beweise der Sätze sind davon unabhängig.

2. Statt Satz I beweisen wir allgemeiner den folgenden

Satz 1. *Unter der Umkehrbedingung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu|^2 = O(n) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^2 \, d\varphi = O\left(\frac{1}{1-r}\right) \tag{9}$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > \frac{1}{2}$, *aber nicht für* $k = \frac{1}{2}$.

Beweis. Wir wissen schon, daß die beiden Bedingungen von (9) äquivalent sind und $F(z) = O(1)(1-r)^{-1}$ zur Folge haben. Also ist $f(z) = (1-z)F(z) = O(1)$ in jedem Winkelraum und $= o(1)$ für reelle $z \to 1-0$, so daß nach einem Satz von MONTEL [**10**, S. 170/71]

$$f(z) = o(1) \quad \text{für } z \to 1 \text{ in jedem Winkelraum} \tag{10}$$

gilt. Aus $G(z) = (1-z)^{-k} F(z) = (1-z)^{-k-1} f(z) = \sum_n S_n^{k+1}[a_\nu] z^n$ ergibt sich nach der CAUCHYschen Koeffizientenformel

$$S_n^{k+1}[a_\nu] = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\varphi| \le m/n} + \int_{m/n \le |\varphi| \le \pi} \right) \frac{G(z)}{z^n} \, d\varphi = A + B, \tag{11}$$

wobei $r = 1 - \frac{1}{n}$ und $n \ge \frac{n}{m} \ge 2$ sein soll. Nach der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARTZ und (8) gilt gleichmäßig in n, m

$$B = O(1) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|^2 d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{m/n}^{\pi} \frac{d\varphi}{\varphi^{2k}} \right\}^{\frac{1}{2}} = O(n^{\frac{1}{2}}) \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{k-\frac{1}{2}}.$$

Also kann man zu $\varepsilon > 0$ ein $m \ge 2\pi$ so finden, daß für alle großen n durchweg $|B| \le \frac{\varepsilon}{2} n^k$ ist. Wird m in dieser Weise fest gewählt, so liegen die in A vorkommenden z ganz in einem festen Winkelraum, und wegen (10) und (8) gilt

$$A = o(1) \int_{|\varphi| \le m/n} \frac{d\varphi}{(1-r)^{k+1}} = o(n^k) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Daher ist insgesamt $|S_n^{k+1}[a_\nu]| \le \varepsilon n^k$ für alle großen n. Dies beweist den Satz für $k > \frac{1}{2}$, während man für $k = \frac{1}{2}$ die Folge

$$s_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{für } n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet. Für sie gilt $\sum_0^n |s_\nu|^2 = O(n)$, $\sum_0^n s_\nu = O(\sqrt{n}) = o(n)$ und folglich (A), aber $s_n \neq o(\sqrt{n})$ und folglich nicht $(C, \frac{1}{2})$.

3. Statt Satz II beweisen wir allgemeiner den folgenden

Satz 2. *Unter der Umkehrbedingung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\nu a_\nu|^2 = O(n) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |z f'(z)|^2 \, d\varphi = O\left(\frac{1}{1-r}\right) \tag{12}$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > -\frac{1}{2}$, *aber nicht für* $k = -\frac{1}{2}$.

Beweis. Wir wissen schon, daß die beiden Bedingungen von (12) äquivalent sind. Ferner folgt nach der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARTZ und (8)

$$(13)\qquad \begin{cases} f(z) = f(r) + \int_0^{\varphi} f'(re^{it})\, re^{it}\, i\, dt = O(1) + O(1)\,|\varphi|^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = O(1)\left(\dfrac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ also } = O(1) \text{ in jedem Winkelraum.} \end{cases}$$

Wie beim Beweis von Satz 1 ergibt sich wieder (10) und (11), wobei aus B durch partielle Integration $B_1+B_2+B_3$ entsteht:

$$B = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{z^{-n}}{-in}\cdot\frac{f(z)}{(1-z)^{k+1}}\Bigg|_{\varphi=-\frac{m}{n}}^{\varphi=\frac{m}{n}} + \frac{1}{2\pi}\int_{m/n\le|\varphi|\le\pi}\frac{z^{-n}}{in}\left\{\frac{izf'(z)}{(1-z)^{k+1}} + \frac{(k+1)\,izf(z)}{(1-z)^{k+2}}\right\}d\varphi.$$

Nach CAUCHY-SCHWARTZ und (8), (13) gilt gleichmäßig in n, m

$$B_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|zf'(z)|^2\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{m,n}^{\pi}\frac{d\varphi}{\varphi^{2(k+1)}}\right\}^{\frac{1}{2}} = O(n^{-\frac{1}{2}})\left(\frac{n}{m}\right)^{k+\frac{1}{2}},$$

$$B_3 = O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{m/n}^{\pi} n^{\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{\varphi^{k+\frac{3}{2}}} = O(n^{-\frac{1}{2}})\left(\frac{n}{m}\right)^{k+\frac{1}{2}}.$$

Also kann man zu $\varepsilon>0$ ein $m\ge 2\pi$ so finden, daß für alle großen n durchweg $|B_2|\le\frac{\varepsilon}{4}n^k$, $|B_3|\le\frac{\varepsilon}{4}n^k$ ist. Wird m in dieser Weise festgewählt, so folgen wegen (10) und (8) wie bei Satz 1 die Abschätzungen $A=o(n^k)$, $B_1=o(n^k)$ für $n\to\infty$. Daher ist insgesamt $|S_n^{k+1}[a_\nu]|\le\varepsilon n^k$ für alle großen n. Dies beweist den Satz für $k>-\frac{1}{2}$, während man für $k=-\frac{1}{2}$ die Reihe mit den Gliedern

$$a_n = \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} & \text{für } n = 2^m \quad (m=0,1,\ldots) \\ 0 & \text{sonst für } n\ge 1 \end{cases}$$

betrachtet, wobei a_0 aus $\sum_0^\infty a_n = 0$ bestimmt wird. In diesem Fall gilt (12) und (A), aber $a_n\neq o(n^{-\frac{1}{2}})$ und folglich nicht $(C,-\frac{1}{2})$.

4. Die Umkehrbedingungen der Sätze I und II lassen sich in natürlicher Weise verallgemeinern zu $S_n^\alpha[s_\nu]=O(n^\alpha)$ bzw. $S_n^\alpha[\nu a_\nu]=O(n^\alpha)$. Entsprechende Verallgemeinerungen sind bei den Sätzen 1 und 2 möglich:

Satz 3. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(14)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^\alpha[s_\mu]|^2 = O(n^{2\alpha+1}) \qquad \textit{oder} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F(z)}{(1-z)^\alpha}\right|^2 d\varphi = O(1)/(1-r)^{2\alpha+1}$$

mit $\alpha>-\frac{1}{2}$ *gilt* (A)$\Rightarrow$(C, k) *für* $k>\alpha+\frac{1}{2}$, *aber nicht für* $k=\alpha+\frac{1}{2}$.

Satz 4. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(15)\quad \sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha[\mu a_\mu]|^2 = O(n^{2\alpha+1}) \quad \textit{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z f'(z)}{(1-z)^\alpha}^2 d\varphi = O(1)/(1-r)^{2\alpha+1}$$

mit $\alpha > -\frac{1}{2}$ *gilt* $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > \alpha - \frac{1}{2}$, *aber nicht für* $k = \alpha - \frac{1}{2}$.

Die Beweise verlaufen genau so wie in den Spezialfällen $\alpha = 0$: Aus (14) folgt nach CAUCHY-SCHWARTZ und (4)

$$(16)\quad \sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha[s_\mu]| = O(n^{\alpha+1}), \quad \text{also} \quad (1-z)^{-\alpha} F(z) = O(1)(1-r)^{-\alpha-1}.$$

Bei der Abschätzung von B ist die Integralform von (14) zu benutzen. Das Gegenbeispiel für Satz 3 berechnet sich aus

$$S_n^\alpha[s_\nu] = \begin{cases} n^{\alpha+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus (15) und (A) folgt nach CAUCHY-SCHWARTZ und (8)

$$(17)\quad f(z) = O(1) + O(1)(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\varphi} (\operatorname{Max}(t, 1-r))^{2\alpha} dt \right\}^{\frac{1}{2}} = O(1) \left(\frac{|1-z|}{1-|z|} \right)^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Bei der Abschätzung von $B_{2,3}$ ist (15) und (17) zu verwenden. Das Gegenbeispiel für Satz 4 berechnet sich aus

$$S_n^\alpha[\nu a_\nu] = \begin{cases} n^{\alpha+\frac{1}{2}} & \text{für} \quad n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Bedingung $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n^\alpha[\nu a_\nu] / n \binom{n+\alpha}{n} = 0$ für a_0. In diesem Fall gilt $S_n^{\alpha+\frac{1}{2}}[\nu a_\nu] \neq o(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$, also nicht $(C, \alpha - \frac{1}{2})$.

5. Wir haben bisher nur Umkehrbedingungen mit dem Exponenten $\varrho = 2$ untersucht. Nach § 1 bietet sich auch der Fall $\varrho = 1$ an, der auf die vorangehende Arbeit [6] zurückführt. Die Rechnungen sind hierbei etwas einfacher, doch werden die Sätze I und II nicht mehr unmittelbar erhalten.

Satz 5. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(18)\quad \sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu| = O(n) \quad \textit{oder} \quad F(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > 1$, *aber nicht für* $k = 1$.

Satz 6. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(19)\quad \sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha[s_\mu]| = O(n^{\alpha+1}) \quad \textit{oder} \quad (1-z) F(z) = O(1) \left(\frac{|1-z|}{1-|z|} \right)^{\alpha+1}$$

mit $\alpha > -1$ *gilt* $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > \alpha + 1$, *aber nicht für* $k = \alpha + 1$.

Hierbei ist der folgende Grenzfall bemerkenswert:

Es gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > 0$, *falls* $(1-z)F(z) = O(1)$ *für* $|z| < 1$.

Beweis. Für $\alpha = 0$ geht Satz 6 in Satz 5 über. Wie bei (16) erkennt man, daß die arithmetischen Umkehrbedingungen die entsprechenden funktionentheoretischen zur Folge haben. Mit der letzteren Umkehrbedingung ist der positive Teil beider Sätze in [6] bewiesen worden. Das Gegenbeispiel berechnet sich aus

$$\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\alpha [s_\mu] = \begin{cases} n^{\alpha+1} & \text{für } n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 7. *Unter der Umkehrbedingung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\nu a_\nu| = O(n) \quad \text{oder} \quad z f'(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \tag{20}$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > 0$, *aber nicht für* $k = 0$.

Satz 8. *Unter der Umkehrbedingung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha [\mu a_\mu]| = O(n^{\alpha+1}) \quad \text{oder} \quad (1-z) z f'(z) = O(1) \left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\alpha+1} \tag{21}$$

mit $\alpha > -1$ *gilt* $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > \alpha$, *aber nicht für* $k = \alpha$.

Hierbei ist der folgende Grenzfall bemerkenswert:

Es gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > -1$, *falls* $(1-z)f'(z) = O(1)$ *für* $|z| < 1$.

Beweis. Für $\alpha = 0$ geht Satz 8 in Satz 7 über. Für den positiven Teil der Behauptungen genügt es, Satz 8 mit der funktionentheoretischen Umkehrbedingung zu beweisen. Wie bei (13) und (17) folgt

$$f(z) = O(1) + O(1)(1-r)^{-\alpha-1} \int_0^{|\varphi|} (\mathrm{Max}(t, 1-r))^\alpha dt = O(1) \left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\alpha+1}. \tag{22}$$

Bei der Abschätzung von $B_{2,3}$ ist (21) und (22) zu verwenden. Das Gegenbeispiel berechnet sich aus

$$\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\alpha [\mu a_\mu] = \begin{cases} n^{\alpha+1} & \text{für } n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Bedingung $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{\alpha+1} [\nu a_\nu] \Big/ n \binom{n+\alpha+1}{n} = 0$ für a_0.

6. Wir wollen jetzt den Fall $\varrho = +\infty$ näher untersuchen, bei dem die arithmetischen Umkehrbedingungen in den Vordergrund treten. Wir benutzen dabei den bekannten

Konvexitätssatz. *Ist* $-1 \leqq \alpha < \beta$ *und*

$$S_n^k [s_\nu] = S_n^{k+1} [a_\nu] = O(n^k) \quad \text{für } k > \alpha \tag{23}$$

so folgt aus (C, k) *für* $k>\beta$ *sogar* (C, k) *für* $k>\alpha$. *Dasselbe gilt bei Ersetzung von* (23) *durch*

$$S_n^{k+1}[\nu a_\nu] = O(n^{k+1}) \quad \text{für} \quad k>\alpha. \tag{24}$$

Ein Beweis für den ersten Teil der Behauptung findet sich z.B. in [6], während der zweite Teil mittels der Identität

$$(n+k+1)\, S_n^k[s_\nu] - (k+1)\, S_n^{k+1}[s_\nu] = S_n^{k+1}[\nu a_\nu]$$

auf den ersten Teil zurückgeführt werden kann. Für sich allein genommen besagt (24) weniger als (23).

Satz 9. *Unter der Umkehrbedingung*

$$s_n = O(1) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\Re F(z)|\, d\varphi = O(1) \tag{25}$$

gilt (A) $\Rightarrow$ (C, k) *für* $k>0$, *aber nicht für* $k=0$.

Satz 10. *Unter der Umkehrbedingung*

$$S_n^\alpha[s_\nu] = O(n^\alpha) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{F(z)}{(1-z)^\alpha}\right| d\varphi = O(1)/(1-r)^\alpha \tag{26}$$

mit $\alpha>0$ *gilt* (A) $\Rightarrow$ (C, k) *für* $k>\alpha$, *aber nicht für* $k=\alpha$.

Satz 11. *Unter der Umkehrbedingung*

$$n a_n = O(1) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\Re z f'(z)|\, d\varphi = O(1) \tag{27}$$

gilt (A) $\Rightarrow$ (C, k) *für* $k>-1$.

Satz 12. *Unter der Umkehrbedingung*

$$S_n^\alpha[\nu a_\nu] = O(n^\alpha) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{z f'(z)}{(1-z)^\alpha}\right| d\varphi = O(1)/(1-r)^\alpha \tag{28}$$

mit $\alpha>0$ *gilt* (A) $\Rightarrow$ (C, k) *für* $k>\alpha-1$, *aber nicht für* $k=\alpha-1$.

Beweis. Die Sätze 9 und 11 stellen die Grenzfälle der Sätze 10 und 12 für $\alpha=0$ dar. Auf Grund der Cauchy-Fourierschen Koeffizientenformel

$$s_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Re\left(F(z)\right) e^{-in\varphi}\, d\varphi, \qquad n \geqq 1,\ r = 1 - \frac{1}{n}$$

haben diesmal die funktionentheoretischen Umkehrbedingungen die entsprechenden arithmetischen zur Folge. Daher folgt der positive Teil der Sätze 9 bis 12 aus den Sätzen 5 bis 8 in Verbindung mit dem Konvexitätssatz. Die Gegenbeispiele berechnen sich einschließlich des Grenzfalles $\alpha=0$ aus

$$(1-z)^{-\alpha} F(z) = (1+z)^{-\alpha-1} \quad \text{bzw.} \quad (1-z)^{-\alpha} z f'(z) = z(1+z)^{-\alpha-1}.$$

Man beachte, daß $\Re(1+z)^{-1}>0$ ist für $|z|<1$ und daß beim zweiten Beispiel noch a_0 passend zu wählen ist.

Es ist bemerkenswert, daß die Umkehrbedingung der Sätze 6 und 8 die Umkehrbedingungen der Sätze 10 und 12 mit $\alpha+1$ oder $\alpha+1+\varepsilon$ statt α zur Folge haben. Damit wird der positive Teil der Sätze 6 und 8 aus den Sätzen 10 und 12 ableitbar. Die Sätze 10 und 12 können im Fall der funktionentheoretischen Umkehrbedingungen natürlich auch mit unserer funktionentheoretischen Methode direkt hergeleitet werden. Der Beweis wird dabei sogar besonders einfach[3]).

7. Nach dem Studium des zentralen Falles $\varrho=2$ und der Extremfälle $\varrho=1$, $\varrho=+\infty$ wenden wir uns nun der Untersuchung des allgemeinen Falles $1<\varrho<+\infty$ zu. Je nachdem ob $\varrho\leqq 2$ oder $\geqq 2$ ist, treten die funktionentheoretischen oder die arithmetischen Umkehrbedingungen in den Vordergrund. Wir setzen $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=1$.

Satz 13. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(29)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu|^\varrho=O(n)\qquad \textit{oder}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|F(z)|^{\varrho'}\,d\varphi=O(1)/(1-r)^{\varrho'-1}$$

gilt $(A)\Rightarrow(C,k)$ *für* $k>\frac{1}{\varrho}$, *aber nicht für* $k=\frac{1}{\varrho}$.

Satz 14. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(30)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^\alpha[s_\mu]|^\varrho=O(n^{\varrho\alpha+1})\qquad \textit{oder}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F(z)}{(1-z)^\alpha}\right|^{\varrho'}d\varphi=O(1)/(1-r)^{\varrho'\alpha+\varrho'-1}$$

mit $\alpha>-\frac{1}{\varrho}$ *gilt* $(A)\Rightarrow(C,k)$ *für* $k>\alpha+\frac{1}{\varrho}$, *aber nicht für* $k=\alpha+\frac{1}{\varrho}$.

Satz 15. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(31)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}|\nu a_\nu|^\varrho=O(n)\qquad \textit{oder}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|zf'(z)|^{\varrho'}\,d\varphi=O(1)/(1-r)^{\varrho'-1}$$

gilt $(A)\Rightarrow(C,k)$ *für* $k>\frac{1}{\varrho}-1$, *aber nicht für* $k=\frac{1}{\varrho}-1$.

Satz 16. *Unter der Umkehrbedingung*

$$(32)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^\alpha[\mu a_\mu]|^\varrho=O(n^{\varrho\alpha+1})\qquad \textit{oder}\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{zf'(z)}{(1-z)^\alpha}\right|^{\varrho'}d\varphi=O(1)/(1-r)^{\varrho'\alpha+\varrho'-1}$$

mit $\alpha>-\frac{1}{\varrho}$ *gilt* $(A)\Rightarrow(C,k)$ *für* $k>\alpha+\frac{1}{\varrho}-1$, *aber nicht für* $k=\alpha+\frac{1}{\varrho}-1$.

[3]) Da der funktionentheoretische Teil des folgenden § 7 auch hierauf zurückgeführt werden kann, so kann hierin wohl der Hauptfall der funktionentheoretischen Methode gesehen werden.

Bemerkenswert sind hierbei die sich aus Satz 14 und 16 ergebenden Grenzfälle:

Unter der Umkehrbedingung

$$(33)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^{-\frac{1}{\varrho}}[s_\mu]|^\varrho = O(1) \qquad \textit{oder} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(1-z)F(z)|^{\varrho'}}{|1-z|}\, d\varphi = O(1)$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > 0$, *und unter der Umkehrbedingung*

$$(34)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{-\frac{1}{\varrho}}[\mu a_\mu]^\varrho = O(1) \qquad \textit{oder} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(1-z)zf'(z)|^{\varrho'}}{|1-z|}\, d\varphi = O(1)$$

gilt $(A) \Rightarrow (C, k)$ *für* $k > -1$.

Beweis. Für $\alpha = 0$ geht Satz 14 und 16 in Satz 13 und 15 über. Nach der Ungleichung von HAUSDORFF-YOUNG folgen für $\varrho \leqq 2$ die funktionentheoretischen Umkehrbedingungen aus den entsprechenden arithmetischen, während für $\varrho \geqq 2$ das Umgekehrte der Fall ist. Nach der Ungleichung von HÖLDER gilt für $k > \alpha + \frac{1}{\varrho} \geqq 0$

$$S_n^k[s_\nu] = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} (n+1-\nu)^{k-\alpha-1} |S_\nu^\alpha[s_\mu]|$$

$$= O\left(n^{k-\alpha-\frac{1}{\varrho}}\right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha|^\varrho\right)^{1,\varrho},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{F(z)}{(1-z)^k}\right| d\varphi = \frac{O(1)}{(1-r)^{k-\alpha-\frac{1}{\varrho}}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{F(z)}{(1-z)^\alpha}\right|^{\varrho'} d\varphi\right)^{1/\varrho'}.$$

Daher folgt der positive Teil der Sätze 13 bis 16 einschließlich der Grenzfälle $\alpha = -\frac{1}{\varrho}$ aus den Sätzen 10 und 12. Das Gegenbeispiel für Satz 14 berechnet sich aus

$$S_n^\alpha[s_\nu] = \begin{cases} n^{\alpha+\frac{1}{\varrho}} & \text{für} \quad n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, daß in diesem Fall $\sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu^\alpha| = O\left(n^{\alpha+\frac{1}{\varrho}}\right)$ und folglich

$$(1-z)^{-\alpha} F(z) = O(1)\,(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{\varrho}}$$

ist. Entsprechend berechnet sich das Gegenbeispiel für Satz 16 aus

$$S_n^\alpha[\nu a_\nu] = \begin{cases} n^{\alpha+\frac{1}{\varrho}} & \text{für} \quad n = 2^m \quad (m = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei noch a_0 passend zu bestimmen ist.

8. Wir schließen noch einige Bemerkungen an.

Die bewiesenen Sätze gewinnen nach Ersetzung von $S_n^\alpha[s_\nu]$ durch s_n oft eine übersichtlichere Form. So entsteht z.B. aus Satz 10 der

Satz 17. *Unter der Umkehrbedingung*

$$s_n = O(n^\alpha) \quad \text{oder} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |F(z)|\, d\varphi = O(1)/(1-r)^\alpha \tag{35}$$

mit $\alpha > 0$ *folgt aus*

$$(1-z)\,F(z) = o(1)\,(1-z)^{-\alpha} \quad \text{für reelle } z \to 1-0 \tag{36}$$

sogar

$$S_n^k[s_\nu] \Big/ \binom{n+k}{n} = o(n^\alpha) \quad (n \to \infty) \tag{37}$$

für jedes $k > 0$, *aber nicht mehr für* $k = 0$.

In der Sprache der Limitierungstheorie besagen (36) bzw. (37), daß $s_n = o(n^\alpha)$ im Sinne (A) bzw. (c, k) ist. Die Umkehrbedingung (35) ist so gebildet, daß sie für $s_n = \binom{n+\alpha}{n}$ gerade erfüllt ist.

Die funktionentheoretischen Umkehrbedingungen lassen sich nach der Theorie der Fourier-Reihen mit Lebesgueschen Klassen und Lipschitz-Klassen ausdrücken und so mit Eigenschaften der Funktionen entlang des Einheitskreises in Zusammenhang bringen. Gemeinsam mit Herrn A. Peyerimhoff ist eine Arbeit in Vorbereitung, die ausgehend von den Funktionenklassen bei Fourier-Reihen die allgemeinen Zusammenhänge zwischen den funktionentheoretischen und den arithmetischen Bedingungen klärt und die Bedingungen selbst in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit voneinander untersucht. Hierhin gehört z.B. die Frage, wie sich die Umkehrbedingung (30) für verschiedene α, ϱ mit gleichem $\alpha + \frac{1}{\varrho}$ (d.h. gleicher Umkehrwirkung) verhält. Es läßt sich zeigen, daß dabei die arithmetische Umkehrbedingung für größer werdendes ϱ schwächer wird.

Die Verwendung der Parsevalschen Gleichung erlaubt auch die Verbesserung einer Abschätzung bei einem gemeinsam mit den Herren R. Bojanić und A. Peyerimhoff behandelten, verwandten Problem [*1*]:

Satz 18. *Aus* $a_n \geqq 0$ *und* $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu s_{n-\nu} = \frac{n^2}{2} + O(n)$ *folgt* $s_n = n + O(n^{\frac{2}{3}})$.

Das Restglied enthielt vorher noch den Faktor $\log^{\frac{1}{3}} n$ [4]). Beim Beweis setzt man $(1-z)F^2(z) = (1-z)^{-3} + G(z)$ und benutzt jetzt neben $G(z) = O(1)\,(1-|z|)^{-2}$ die schärfere Abschätzung $\int_{-\pi}^{\pi} |G(z)|^2 d\varphi = O(1)\,(1-r)^{-3}$. Für genügend kleines, aber festes $\delta > 0$ gilt somit

$$(1-z)^2 F(z) - 1 = \begin{cases} O(1)\,|1-z|^3 \cdot |G(z)| & \text{für } |1-z| \leqq \delta (1-r)^{\frac{3}{2}} \\ O(1)\,|1-z|^{\frac{3}{2}}\,(1-r)^{-1} & \text{für } |1-z| \geqq \delta (1-r)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

[4]) Herr H. E. Richert teilte mir freundlicherweise mit, daß er unabhängig die gleiche Verbesserung gefunden hat.

und daher für $r = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \to \infty)$ nach CAUCHY-SCHWARTZ[5])

$$S_n^3[a_\nu - 1] = O(1) \int\limits_{|\varphi| \leq \delta n^{-\frac{3}{2}}} |G(z)| \cdot |1 - z|^{-1} d\varphi + O(1) \int\limits_{\delta n^{-\frac{3}{2}} \leq |\varphi| \leq \pi} n |\varphi|^{-\frac{5}{2}} d\varphi$$
$$= O(1)\, n^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} + O(1)\, n \cdot n^{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = O(n^2).$$

Wegen $a_\nu - 1 \geqq -1$ folgt aus Konvexitätsgründen $S_n^1[a_\nu - 1] = O(n^{\frac{3}{2}})$.

Die in dieser Arbeit angegebenen Beweismethoden sind nicht auf Potenzreihen beschränkt, sondern lassen sich allgemeiner auch auf Dirichlet-Reihen und Laplace-Transformationen sinngemäß ausdehnen. Die bewiesenen Sätze sind mit der arithmetischen Umkehrbedingung zu einem Teil schon bekannt gewesen: Der positive Teil von Satz 15 (Satz 2 und 7) findet sich im wesentlichen schon in [4, Lemma 4], mit der diese Arbeit auch sonst manche Berührungspunkte hat. Für eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf Dirichlet-Reihen vgl. [9]. Die arithmetische Umkehrbedingung (31) verbessert die bekannte Umkehrbedingung $\sum n |a_n|^2 < \infty$ von FEJÉR [vgl. 8, S. 65] und ihre Verallgemeinerungen $\sum n^{\varrho-1} |a_n|^\varrho < \infty$ in [3]. Außerdem ist der arithmetische Teil von § 6 als bekannt anzusehen.

Literatur

[1] BOJANIĆ, R., W. JURKAT u. A. PEYERIMHOFF: Über einen Tauber-Satz für Faltungen. Math. Z. **65**, 195—199 (1956). — [2] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [3] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some theorems concerning DIRICHLET's series. Messenger of Math. **43**, 134—147 (1914). — [4] HARDY, G. H., u. J. E. LITTLEWOOD: A convergence criterion for Fourier series. Math. Z. **28**, 612—634 (1928). — [5] IZUMI, S.: A simple proof of LITTLEWOOD's Tauberian theorem. Proc. Japan Acad. **30**, 927—929 (1954). — [6] JURKAT, W. B.: Ein funktionentheoretischer Beweis für O-Tauber-Sätze bei Potenzreihen. Archiv d. Math. **7**, 122—125 (1956). — [7] JURKAT, W. B.: Ein funktionentheoretischer Beweis für O-Tauber-Sätze bei den Verfahren von BOREL und EULER-KNOPP. Archiv d. Math. **7**, 278—283 (1956). — [8] LANDAU, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. Berlin 1929. — [9] SZÁSZ, O.: Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. Sitzgsber. München **59**, 325—340 (1929). — [10] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1932. — [11] WIELANDT, H.: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **56**, 206—207 (1952).

[5]) Hiermit ist die einzige Veränderung gegenüber dem früheren Beweis verbunden.

Dept. of Mathematics, Ohio State University, Columbus 10, Ohio (USA)

(Eingegangen am 4. September 1956)

Grunsky, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 223—228 (1957)

Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. II

Von
Helmut Grunsky

Die in Teil I[1]) verwendete Methode läßt sich so weiterbilden, daß sie auch zum Beweise der dort in Anmerkung [2]) erwähnten anderen Ergebnisse von de la Vallée Poussin und Julia ausreicht. Es dürfte zweckmäßig sein, das Beweisprinzip zunächst in Gestalt eines allgemeinen Hilfssatzes zu formulieren.

Unter einer linken oder rechten Halbumgebung eines analytischen Jordan-Bogens Z in der Ebene werde ein beliebiges, teilweise von Z berandetes Gebiet verstanden, das zu jedem Punkt von Z eine Halbumgebung enthält und das bei einer Durchlaufung des Bogens im Sinne seiner Orientierung zur Linken bzw. Rechten liegt.

Hilfssatz. Es seien Z_1 und Z_2 zwei abgeschlossene orientierte analytische Jordan-Bogen in der Ebene der komplexen Veränderlichen z, $\mathfrak{Z}_1$ eine linke, $\mathfrak{Z}_2$ eine rechte Halbumgebung von Z_1 bzw. Z_2. $\mathfrak{g}_\iota(z)$, $\iota = 1, 2$, sei harmonisch und nicht konstant in $\mathfrak{Z}_\iota \cup Z_\iota$ und auf Z_ι gelte, wenn $\partial/\partial n$ die Ableitung nach der rechts weisenden Normalen bedeutet:

$$\mathfrak{g}_\iota(z) = c = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathfrak{g}_\iota}{\partial n} \geqq 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde ferner angenommen

$$\int_{Z_1} \frac{\partial \mathfrak{g}_1}{\partial n}\, ds = \int_{Z_2} \frac{\partial \mathfrak{g}_2}{\partial n}\, ds \qquad (s\text{: Bogenlänge auf } Z_\iota)$$

(die Gültigkeit dieser Voraussetzung läßt sich durch passende Verkürzung des einen Bogens erzwingen). Dann gibt es eine punktweise Identifizierung der Bogen Z_1 und Z_2 miteinander, derart, daß die auf der so entstandenen Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Z}$ durch $\mathfrak{g}_\iota(z)$ $(\iota = 1, 2)$ erklärte Funktion überall auf $\mathfrak{Z}$ harmonisch ist.

Beweis. Der Anfangspunkt von Z_ι sei $z_0^{(\iota)}$. Durch

$$\varphi_\iota(z^{(\iota)}) = \int_{z_0^{(\iota)}}^{z^{(\iota)}} \frac{\partial \mathfrak{g}_\iota}{\partial n}\, ds, \qquad z^{(\iota)} \in Z_\iota$$

wird auf Z_ι eine im strengen Sinne monoton wachsende Funktion der Bogenlänge erklärt $\left(\frac{\partial \mathfrak{g}_\iota}{\partial n} = 0 \text{ kann nur in endlich vielen Punkten auf } Z_\iota \text{ gelten}\right)$.

[1]) Teil I s. Math. Z. **67**, 129—132 (1957).

Wir identifizieren zwei Punkte $z^{(1)}$, wenn $\varphi_1(z^{(1)}) = \varphi_2(z^{(2)})$. Die entstandene Riemannsche Mannigfaltigkeit bilden wir umkehrbar eindeutig und konform auf ein schlichtes Gebiet $\mathfrak{W}$ der w-Ebene ab; $\mathfrak{W}_\iota$ sei das Bild von $\mathfrak{Z}_\iota$, W das gemeinsame Bild der Z_ι, w_0 das der $z_0^{(\iota)}$. Durch Verpflanzung der $\mathfrak{g}_\iota(z)$ entsteht eine stetige Funktion $\tilde{\mathfrak{g}}(w)$, die zunächst sicher in allen nicht auf W liegenden Punkten harmonisch ist. Die Verpflanzung der $\varphi_\iota(z^{(\iota)})$ ergebe $\tilde{\varphi}_\iota(w)$ auf W. Wegen der Invarianz von $\frac{\partial \mathfrak{g}_\iota}{\partial n}\,ds$ gegenüber konformer Abbildung ist

$$\tilde{\varphi}_\iota(w) = \int_{w_0}^{w} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}_\iota}{\partial n}\,ds \qquad (s\text{: Bogenlänge auf } W).$$

Gemäß der Identifizierungsvorschrift ist aber $\tilde{\varphi}_1(w) = \tilde{\varphi}_2(w)$, also auch $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial s}$, d.h. $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}_1}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}_2}{\partial n}$. Die Funktion $\tilde{\mathfrak{g}}(w)$ ist daher auf W nicht nur stetig, sondern auch mit stetigen Ableitungen versehen, und daraus folgt, daß sie auch dort noch harmonisch ist[2]).

Es sei nun $\mathfrak{Z}$ ein Gebiet in der z-Ebene der endlichen Zusammenhangszahl $n > 1$ und $\infty \in \mathfrak{Z}$. Sein Rand Z bestehe aus einfach geschlossenen analytischen Kurven Z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Ferner setze man wie in Teil I:

$$\mathfrak{g}(z) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa g(z, z_\varkappa) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu h_\nu(z), \tag{1}$$

wo $g(z, z_\varkappa)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{Z}$ mit Singularität $z_\varkappa \neq \infty$, $h_\nu(z)$ das harmonische Maß von Z_ν bedeutet; die Punkte $z_\varkappa \in \mathfrak{Z}$ und die reellen Konstanten $\alpha_\varkappa$ und c_ν sollen jetzt keinerlei Einschränkungen unterworfen sein, d.h. die Bedingung 3. aus Teil I fällt weg. $\mathfrak{g}(z)$ besitzt auf jeder Randkomponenten Z_ν eine gerade Anzahl von kritischen Stellen mit Vorzeichenwechsel der nach der äußeren Normalen genommenen Ableitung $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$. Es seien Z' und Z'' zwei im Punkt z_0 zusammenstoßende Bogen einer Randkomponenten Z_ν, auf denen $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$ verschiedenes Vorzeichen hat. Orientieren wir Z' und Z'' indem wir für beide z_0 als Anfangspunkt festsetzen, und verstehen wir unter $\frac{\partial}{\partial n}$ wieder die Ableitung in Richtung der von dem orientierten Bogen nach rechts weisenden Normalen, so können wir unseren Hilfssatz anwenden, wobei z_0 die Rolle von $z_0^{(1)}$ und $z_0^{(2)}$ übernimmt, je ein (nicht notwendig echter) Teilbogen von Z' und Z'' die von Z_1 bzw. Z_2. Man kann die Identifizierung

[2]) Das folgt leicht aus dem Satz: Eine stetig differenzierbare Funktion $f(w)$ ist harmonisch, wenn $\int_K \frac{\partial f}{\partial n}\,ds = 0$ über den Rand K jedes im Definitionsgebiet liegenden Kreises (vgl. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, Berlin 1929, Kap. 8, Satz XIII, S. 227). Diese Bedingung ist in unserem Falle erfüllt, auch für jeden Kreis $\mathfrak{K}$, der teilweise zu $\mathfrak{W}_1$, teilweise zu $\mathfrak{W}_2$ gehört, denn das Integral verschwindet, wenn es über den Rand von $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{W}_\iota$ erstreckt wird, und die Summe dieser Integrale ist das Integral über K, da sich die über Bogen von W erstreckten Teilintegrale herausheben.

so weit treiben, daß einer der beiden Bogen Z' und Z'' vollständig erfaßt wird. Bildet man die so erklärte Riemannsche Mannigfaltigkeit schlicht in die w-Ebene ab, so erhält man ein Gebiet $\mathfrak{W}^*$ der Zusammenhangszahl n oder $n-1$; der zweite Fall tritt ein, wenn $Z' \cup Z'' = Z_\nu$ und wenn $\int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds = 0$. Das Bild $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{Z}$ selbst entsteht aus $\mathfrak{W}^*$, indem man einen Schlitz oder Einschnitt $W_\nu^{(0)}$ längs des Bildes der beiden identifizierten Teilbogen von Z' und Z'' führt. Die durch Verpflanzung von $\mathfrak{g}(z)$ entstandene Funktion $\tilde{\mathfrak{g}}(w)$ hat in bezug auf $\mathfrak{W}^*$ dieselben Eigenschaften wie $\mathfrak{g}(z)$ in bezug auf $\mathfrak{Z}$, jedoch ist die Zahl der Vorzeichenwechsel von $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n}$ auf dem Rande von $\mathfrak{W}^*$ um zwei geringer; außerdem gilt $\tilde{\mathfrak{g}}(w) = c_\nu$ auch auf $W_\nu^{(0)}$ und es ist für alle ν:

$$\int_{W_\nu^*} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n}\, ds = \int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds,$$

wo W_ν^* diejenige Randkomponente von $\mathfrak{W}^*$ bedeutet, die dem Bilde von Z_ν angehört.

Auf $\mathfrak{W}^*$ und $\tilde{\mathfrak{g}}$ wenden wir nötigenfalls dieselben Überlegungen an, wie soeben auf $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{g}$ und erhalten ein Gebiet $\mathfrak{W}^{**}$ und eine Funktion $\tilde{\tilde{\mathfrak{g}}}$. Dabei kann es sein, daß der Endpunkt $w_\nu^{(0)}$ des Schlitzes $W_\nu^{(0)}$ auf dem Rande von $\mathfrak{W}^*$ innerer Punkt eines zu verheftenden Bogens ist. In diesem Falle geht das neue Bildgebiet von $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{W}^{**}$ hervor, indem man einen verzweigten Einschnitt führt[3]).

Nach endlich vielen Schritten kommt man zu einem Gebiet und einer Funktion — sie seien wieder mit $\mathfrak{W}^*$ und $\tilde{\mathfrak{g}}$ bezeichnet —, für die folgendes gilt: Die Anzahl m der Randkomponenten von $\mathfrak{W}^*$ ist $\leqq n$. Das Bild $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{Z}$ entsteht aus $\mathfrak{W}^*$, indem man gewisse, im allgemeinen verzweigte, Einschnitte und Schlitze anbringt, deren jeder auf einer Niveaulinie von $\tilde{\mathfrak{g}}$ liegt. Diese Funktion ist in $\mathfrak{W}^*$ überall harmonisch bis auf die Bilder $w_\varkappa$ der Punkte $z_\varkappa$, in denen sie sich verhält wie $-\alpha_\varkappa \log|w - w_\varkappa| + O(1)$. $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n}$ hat auf keiner der eventuellen Randkomponenten W_ν^* von $\mathfrak{W}^*$ einen Vorzeichenwechsel; es ist $\tilde{\mathfrak{g}}(w) = c_\nu$ auf W_ν^*, $\int_{W_\nu^*} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{g}}}{\partial n}\, ds = \int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds$. Im Falle $m = 0$ ist (bei passender Normierung) $\tilde{\mathfrak{g}}(w)$ schon eine elementare Funktion von der im nachstehenden Satze gekennzeichneten Art; im Falle $m > 0$ können wir Satz 1 aus Teil I anwenden.

Der geschilderte Prozeß wird im allgemeinen zu einem anderen Endergebnis führen, wenn er mit einem andern Trennpunkt zwischen zwei Teilbogen verschiedenen Vorzeichens von $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$ begonnen wird, oder wenn er, falls möglich, bei einem späteren Schritt in entsprechender Weise abgewandelt

[3]) Eine zusammenhängende Vereinigungsmenge von endlich vielen Jordan-Bogen, die keinen geschlossenen Weg enthält, heiße verzweigt, wenn sie nicht wieder selbst einen Jordan-Bogen darstellt.

wird; jedoch sind die Bedingungen für die Möglichkeit solcher Abänderungen kaum zu übersehen. Indessen gibt es noch eine andere Art, den Prozeß zu variieren, die bisher nicht in Betracht gezogen wurde. Es ist zwar immer möglich, aber nicht notwendig, bei einem Schritt den einen der beiden Bogen Z' und Z'' vollständig aufzubrauchen. Man kann mit der Identifizierung aufhören, wenn von beiden Bogen, ausgehend von z_0, nur je ein echter Teilbogen erfaßt wurde. Dann liegt allerdings keine Reduktion vor, die Anzahl der Vorzeichenwechsel von $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$ bleibt dieselbe. Indes kann man, von dem erreichten Zwischenstadium ausgehend, in endlich vielen Schritten zu Ende kommen und wird dabei im allgemeinen ein anderes Ergebnis erhalten als vorhin, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen; nämlich, wenn im weiteren Verlauf unvermeidlich einmal das Bild $w_\nu^{(0)}$ der beiden Punkte z' und z'', in denen der erste Schritt abgebrochen wurde, und die von $w_\nu^{(0)}$ ausgehenden Bilder der Reste der Bogen Z' und Z'' in der Rolle von z_0, Z', Z'' des geschilderten ersten Schrittes auftreten; denn dann war ja das Abbrechen des ersten Schrittes nur scheinbar. Diese Ausnahme liegt aber genau in dem schon einmal erwähnten Fall vor, bei dem auf Z_ν zwei Zeichenwechsel stattfinden und außerdem $\int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds = 0$ ist. In jedem anderen Fall können z' und z'' so gewählt werden, daß einer der beiden Restbogen von Z' und Z'', sagen wir der von Z', mit seinem vom Rest von Z'' verschiedenen Nachbarbogen verheftet werden kann, derart, daß jetzt $w_\nu^{(0)}$ noch mit einem weiteren Randpunkt identifiziert und damit zu einem Verzweigungspunkt eines Einschnittes oder Schlitzes wird.

Wir wollen noch vereinbaren, daß jede der benutzten Abbildungen den Punkt ∞ festlasse und dort den Streckungsfaktor 1 und Drehung und Verschiebung 0 habe. Dann ist bis auf die Einzigkeitsaussage folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Sei $\mathfrak{Z}$ ein in der z-Ebene liegendes Gebiet der endlichen Zusammenhangszahl $n>1$, dessen Randkomponenten Z_ν alle echte Kontinuen seien und das ∞ enthalte; es gibt eine konforme Abbildung $w=F(z)$, die sich bei ∞ verhält wie $z+O\left(\frac{1}{z}\right)$, bei der $\mathfrak{g}(z)$ [vgl. (1)] transformiert wird in*

$$\tilde{\mathfrak{g}}(w) = \log|S(w)|$$

mit

$$S(w) = A \prod_{\varkappa=1}^{k} (w - w_\varkappa)^{-\alpha_\varkappa} \prod_{\nu=1}^{n} (w - b_\nu)^{-\beta_\nu},$$

$$w_\varkappa = F(z_\varkappa), \qquad \beta_\nu = \int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds, \qquad A = e^{\mathfrak{g}(\infty)}.$$

In jeder Komponenten der Komplementärmenge des Bildgebietes mit $\beta_\nu \neq 0$ liegt genau ein Punkt b_ν. Die Abbildung ist dann und nur dann einzig, wenn $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}$ auf jeder Randkomponenten höchstens zwei Vorzeichenwechsel aufweist und $\int_{Z_\nu} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial n}\, ds = 0$ gilt für alle Z_ν, auf denen Zeichenwechsel vorkommen.

Der Beweis der Einzigkeitsaussage ergibt sich wie bei Satz 1. Ist auf irgendeine Weise eine Abbildung von der in dem Satz geschilderten Art gefunden, so lege man das Bildgebiet $\mathfrak{Z}'$ in die z'-Ebene und wende auf dieses den geschilderten Prozeß an. Wegen der Invarianz von $\frac{\partial g}{\partial n}\,ds$ ist das Ergebnis dasselbe wie wenn wir von $\mathfrak{Z}$ ausgehen. In dem unserer Einzigkeitsaussage zugrunde liegenden Fall ist der Verlauf ein wohlbestimmter und es werden immer nur Punkte identifiziert, die schon in der z'-Ebene zusammenfallen. Daher können alle auftretenden Abbildungsfunktionen jeweils in der ganzen Ebene regulär gewählt werden und sie sind dann mit Rücksicht auf die Normierung Identitäten. Das heißt aber, daß jeder Bildbereich von der in unserem Satz genannten Art identisch ist mit dem durch unseren Prozeß gewonnenen.

Wir wählen nun speziell

$$g(z) = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu h_\nu(z) \tag{2}$$

und bestimmen die c_ν so, daß

$$\beta_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_\nu} \frac{\partial g}{\partial n}\,ds = -1, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Diese Forderungen führen bekanntlich auf ein System linearer Gleichungen mit nicht verschwindender Determinanten für die c_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$ und lassen sich also auf genau eine Weise erfüllen. Wegen $\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu = 0$ ergibt sich ferner:

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_n} \frac{\partial g}{\partial n}\,ds = n-1. \tag{4}$$

Dabei sind die $c_\nu < 0$, denn wäre etwa $c_1 \geqq 0$ das größte unter den c_ν, so wäre $g(z)$ in $\mathfrak{Z}$ überall kleiner als auf Z_1, und hier also $\frac{\partial g}{\partial n} \geqq 0$, im Widerspruch zu (3). Daher ist auf Z_n überall $\frac{\partial g}{\partial n} > 0$. Normieren wir die Abbildung in die w-Ebene diesmal so, daß $b_n = \infty$, so ist das Bild W_n von Z_n eine einfach geschlossene Kurve, $S(w)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades mit den Nullstellen $b_1, \ldots, b_{n-1}$, und $|S(w)|$ ist im Äußern von W_n größer, im Innern kleiner als auf W_n, d.h. diese Kurve ist eine vollständige Niveaulinie von $S(w)$. Ebenso sieht man, daß eine Randkomponente, für die c_ν minimal ist, ein einfach geschlossenes Bild hat. Damit ist bewiesen:

Satz 3 (von Julia[4]). *Jedes schlichte Gebiet der endlichen Zusammenhangszahl $n > 1$ ohne einpunktige Randkomponente läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf ein beschränktes Gebiet abbilden, dessen Randkomponenten W_ν, $\nu = 1, \ldots, n$ je auf einer Niveaulinie eines von ν unabhängigen Polynoms vom Grade $n-1$ liegen, wobei die äußere Randkomponente eine vollständige Niveaulinie, mindestens eine innere Randkomponente einfach geschlossen ist.*

[4]) Vgl. Julia, G.: Sur une représentation conforme canonique des aires multiplement connexes. C. r. Acad. Sci. Paris **194**, 819—822 (1932).

Von weiteren Anwendungsmöglichkeiten des Beweisprinzips greifen wir nur noch eine heraus. Wir bestimmen die Koeffizienten in (2) so, daß $\beta_\nu = \pm 1$ auf je $\left[\frac{n}{2}\right]$ der Randkomponenten und, bei ungeradem n, $\beta_\nu = 0$ auf der einen verbleibenden Komponenten. Man erhält für $S(w)$ in beiden Fällen eine rationale Funktion vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$. Bei ungeradem n geht die Randkomponente mit $\beta_\nu = 0$ in einen, möglicherweise verzweigten, Schlitz über, und in beiden Fällen sind die Bilder der Randkomponenten mit minimalem und maximalem c_ν einfach geschlossene Kurven. Es gilt also der

Satz 4. *Jedes schlichte Gebiet der endlichen Zusammenhangszahl $n > 1$ ohne einpunktige Randkomponente läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf ein beschränktes Gebiet abbilden, dessen Randkomponenten je auf einer Niveaulinie einer durch das Gebiet bestimmten rationalen Funktion vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$ liegen. Bei ungeradem n ist genau eine der Randkomponenten des Bildes ein (möglicherweise verzweigter) Schlitz, bei geradem n keine; in beiden Fällen sind mindestens zwei Randkomponenten einfach geschlossene Kurven.*

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. November 1956)

Ludford, G. S. S., and S. H. Schot
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 229—237 (1957)

On Sonic Limit Lines in the Hodograph Method*)

By
G. S. S. Ludford and S. H. Schot

It is well-known [5] that in the theory of plane compressible flow two types of limit lines can be distinguished. In a recent paper in this journal Hilda Geiringer [7] has identified a third type of limit line, distinct from the first two. She has called such a line a sonic limit line and has stated its properties, in part without proof.

The only known example of a flow with a sonic limit line is the familiar radial (source) flow found by G. I. Taylor [1]. Later Ringleb [3] stated erroneously that this is the only possible flow exhibiting such a limit line, and the subject is not even mentioned in textbook treatments of limit lines (see e.g. Lighthill [6]).

The object of this paper is (i) to give our original derivations of those unproved results in [7] which were quoted by Geiringer from a private communication of the present authors, and (ii) to show that there exist other flows containing sonic limit lines. In particular we explicitly construct an example of a flow with a sonic limit line which has no source-like character. This example is a linear combination of two known solutions, one discussed by Ringleb [2], and the other by Temple and Yarwood [4]. Like their solutions, the present one is a compressible analogue of the incompressible flow around a semi-infinite plate. In addition to a sonic limit line it contains an example (believed to be the first) of Geiringer's "sonic double limit point".

1. Sonic Limit Singularities. We start by giving the basic equations and relations in the theory of the hodograph method, needed in the later discussion.

In the hodograph variables q, ϑ the so-called potential and stream functions φ, ψ satisfy the Chaplygin equations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{q}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial q}; \qquad (M^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \varrho q \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \tag{1}$$

where

$$\varrho = (1 - q^2)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \tag{2}$$

and

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \cdot \frac{q^2}{1 - q^2}. \tag{3}$$

The sonic speed, i.e. the value of q for which $M = 1$, is $q_t = \sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$.

*) This work was supported by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA—36—034—ORD—1486 with the University of Maryland.

From any non-constant solution $\varphi(q, \vartheta)$, $\psi(q, \vartheta)$ of these equations the coordinates $x(q, \vartheta)$, $y(q, \vartheta)$ are determined by the equations

$$(4) \qquad \begin{cases} dx = \frac{1}{q}\left[\cos\vartheta\, d\varphi - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\, d\psi\right], \\ dy = \frac{1}{q}\left[\sin\vartheta\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\, d\psi\right], \end{cases}$$

the equations (1) being integrability conditions for these.

The hodograph method consists in finding twice continuously differentiable solutions of (1) and determining the corresponding flow in the physical plane defined by (4).

The Jacobian of the transformation from the hodograph plane to the physical plane is

$$(5) \qquad I = \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \vartheta)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q, \vartheta)} = -\frac{1}{\varrho^2 q^3}\left[q^2\psi_q^2 + (1 - M^2)\,\psi_\vartheta^2\right].$$

When $M > 1$ we introduce characteristic coordinates ξ, η of (1) defined by

$$(6) \qquad 2\xi = Q - \vartheta; \quad 2\eta = Q + \vartheta,$$

where

$$Q = \int^q \frac{dq}{q\tan\alpha},$$

and α is the Mach angle $\sin^{-1}\frac{1}{M}$. Then we find

$$(7) \qquad I = -\frac{1}{\varrho^2 q^3}\cot^2\alpha\,\psi_\xi\psi_\eta = \frac{1}{q^3}\varphi_\xi\varphi_\eta.$$

Breakdown of the hodograph transformation will occur at points in the hodograph plane where $I = 0$ and such points are called *limit singularities*. Curves consisting of such points are called *critical curves* and their images in the physical plane are called *limit lines*. It may be shown that limit lines occur only when $M \geqq 1$ and that the solution in the neighborhood of these lines has a characteristic geometry.

If $M > 1$ (i.e. $\alpha \neq 90°$) then $I = 0$ implies that either ψ_ξ or ψ_η is zero; the vanishing of both simultaneously can only occur at an isolated point, which is called a *double limit point*. A curve along which $\psi_\xi = 0$, $\psi_\eta \neq 0$ is called a *limit line* L_1; similarly one along which $\psi_\xi \neq 0$, $\psi_\eta = 0$ is called a *limit line* L_2. These terms may still be used when $M = 1$ at some points of the curve.

If $M = 1$ however (i.e. $\alpha = 90°$), I can vanish without either ψ_ξ or ψ_η vanishing. The following classification of sonic limit singularities is due to Geiringer

Case			Examples
1) $\psi_\xi \neq 0$ $\psi_\eta \neq 0$	a)	$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta \neq 0$	
	b)	$\varphi_\xi \neq 0$ $\varphi_\eta = 0$	
	c)	$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta = 0$	radial flow, section 4—sonic limit line
2) $\psi_\xi = 0$ $\psi_\eta \neq 0$	a)	$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta \neq 0$	
	b)	$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta = 0$	Ringleb flow — sonic point of an L_1
3) $\psi_\xi \neq 0$ $\psi_\eta = 0$	a)	$\varphi_\xi \neq 0$ $\varphi_\eta = 0$	
	b)	$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta = 0$	Ringleb flow — sonic point of an L_2
4) $\psi_\xi = 0$ $\psi_\eta = 0$		$\varphi_\xi = 0$ $\varphi_\eta = 0$	section 4 — sonic double limit point

(Since the ξ, η-coordinates degenerate on the sonic circle, a derivative with respect to ξ or η for $M = 1$ must be interpreted in the sense of a limit as $M \to 1$ from above.)

In this paper we restrict ourselves to the case $M = 1$, and in particular we prove that only case 1c) can occur along a whole segment of the sonic line S. The image of such a line in the physical plane will be termed a *sonic limit line*, L_t.

2. The Sonic Limit Line. We shall now determine those sonic limit singularities which can occur at isolated points only, and not along a whole non-degenerate arc of the sonic line S.

Theorem. In any region of the q, ϑ-plane where $\psi \in C^2$ and is not constant, the cases 1a), 1b), 2), 3), and 4) of the above classification cannot occur along a segment of the sonic line.

Proof. Consider a point at which one but not both $\varphi_\xi, \varphi_\eta$ are zero. Then

$$\psi_\vartheta = \frac{\varrho}{2} \tan \alpha (\varphi_\xi + \varphi_\eta) \to \infty \quad \text{as} \quad \alpha \to 90°.$$

Since this contradicts the hypothesis $\psi \in C^2$, cases 1a), 1b), 2a), and 3a) cannot occur along a line.

With reference to case 2b) we note that

$$\psi_\xi = q \tan \alpha \, \psi_q - \psi_\vartheta \to 0$$

implies that $\psi_q \to 0$ at the sonic speed $q = q_t = \sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$. But then from the TAYLOR formula applied to ψ_q we see that $\psi_q = O(q - q_t)$ while from BERNOULLI's equation in the form (3) we find $\tan \alpha = O(q - q_t)^{-\frac{1}{2}}$. Hence $\psi_q \tan \alpha = O(q - q_t)^{\frac{1}{2}} \to 0$ and $\psi_\vartheta \to 0$. Thus along such a segment $\psi_q = \psi_\vartheta = 0$, which implies $\psi = \text{const}$ in some neighborhood.

A similar argument holds for cases 3b) and 4).

The only remaining type of sonic limit singularity which can occur along a curve is 1c). We shall see that even this case must be broken down into two subcases, of which one can occur only at an isolated point and the other provides the true sonic limit line.

The case 1c) is characterized by $\psi_\xi \neq 0$, $\psi_\eta \neq 0$, $\varphi_\xi = 0$, $\varphi_\eta = 0$. From the last two conditions there follows $\psi_q = 0$, $\psi_\vartheta \cot\alpha = 0$. Hence either $\psi_q = 0$, $\psi_\vartheta = 0$ or $\psi_q = 0$, $\psi_\vartheta \neq 0$ (but such that $\psi_\vartheta \cot\alpha \to 0$ as $\alpha \to 90°$). But when ψ_q, ψ_ϑ are zero along a line, $\psi = \text{const}$ in some neighborhood, and this case is excluded.

These results identify the only type of sonic limit singularity which can provide the true sonic limit line.

Corollary. The necessary and sufficient condition for a curve to be a sonic limit line is

$$M = 1: \quad \psi_q = 0, \quad \psi_\vartheta \neq 0,$$

at each point.

The sufficiency of this condition follows immediately from (5).

Corollary. Neither an L_1 nor an L_2 can coincide with the image of the sonic line for a whole segment.

3. Geometry of the Sonic Limit Line. The geometry in the neighborhood of the L_t may be discussed just as in the case of the L_1 and L_2 by making use of the concept of "exceptional" directions. An exceptional direction in our case is a direction in the physical plane into which all directions but one at the corresponding point in the hodograph plane map.

From the definition of the L_t we have that

$$d\varphi = \varphi_q\, dq + \varphi_\vartheta\, d\vartheta = 0,$$
$$d\psi = \psi_q\, dq + \psi_\vartheta\, d\vartheta = \psi_\vartheta\, d\vartheta,$$

and from the transformation equations (4)

$$dx = -\frac{\psi_\vartheta}{\varrho q} \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$dy = \frac{\psi_\vartheta}{\varrho q} \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Hence

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\vartheta, \quad \text{if } d\vartheta \neq 0.$$

Thus an element of any curve in the hodograph plane on which $d\vartheta \neq 0$ maps into an element with slope $-\cot\vartheta$ in the x, y-plane, i.e. normal to the streamline. Next considering the map of a curve in the hodograph plane with $d\vartheta = 0$ and using q as a parameter on the corresponding curve in the physical plane we find from the transformation equations (4) that $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dy}{dq}$ vanish and

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dq^2} = \dfrac{(\gamma-1)\cos\vartheta}{\varrho a^5}\psi_\vartheta - \dfrac{\sin\vartheta}{\varrho a}\psi_\vartheta \dfrac{d^2\vartheta}{dq^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dq^2} = \dfrac{(\gamma-1)\sin\vartheta}{\varrho a^5}\psi_\vartheta + \dfrac{\cos\vartheta}{\varrho a}\psi_\vartheta \dfrac{d^2\vartheta}{dq^2}. \end{cases}$$

Not both of these second derivatives can vanish because the determinant of 1 and $\frac{d^2\vartheta}{dq^2}$ on the right is

$$\frac{\gamma-1}{\varrho^2 a^6}\psi_\vartheta^2 \neq 0.$$

Now a curve given parametrically by $x(q), y(q)$ will have a cusp if $\frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dq} = 0$ but not both $\frac{d^2x}{dq^2}$, $\frac{d^2y}{dq^2}$ vanish. Hence the direction $d\vartheta = 0$ (i.e. the radial direction) is the exceptional direction and all curves in the hodograph plane having this direction map into cusped curves.

Curves with the non-exceptional direction are the isovel (sonic line) and the equipotential (from Chaplygin's equations $\varphi_\vartheta = 0$ on the sonic line, so that the equipotential coincides with the isovel).

Curves with the exceptional direction are the streamline $\left(\text{since } \frac{d\vartheta}{dq} = -\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta} = 0\right)$ and the isocline (which according to (8) with $\frac{d^2\vartheta}{dq^2} = 0$ maps into a cusped curve with a cusp in the streamline direction).

Since the characteristics C^+, C^- are perpendicular to the streamline and since their images Γ^+ and Γ^- are separated by the isocline in the hodograph plane they are both tangent to the sonic limit line in the physical plane and lie on opposite sides of the isocline (and hence streamline).

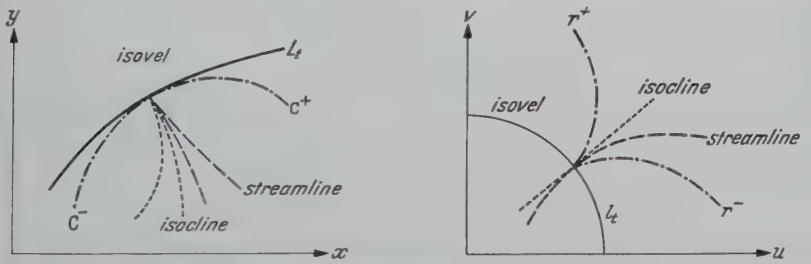

Fig. 1. Geometry in the neighborhood of the sonic limit line

Thus it is seen that the geometric behavior of curves at the sonic limit line (see fig. 1) differs from that at the L_1 and L_2. For example the isoclines are not enveloped at the L_t and no longer does one family of characteristics have cusps at the L_t. However other properties, and in particular the most important one that two branches of the solution meet at the limit line, hold true also for the L_t.

4. Construction of Solutions with Sonic Limit Line. We shall now show how flows with an L_t may be constructed. The discussion of the flow corresponding to a particular solution of the hodograph equations is facilitated by introducing the variable $\tau = q^2$ in place of q. With this variable Chaplygin's equations (1) take the form

$$\begin{cases} \varphi_\vartheta = 2\tau(1-\tau)^{-\beta}\psi_\tau, \\ [1-(1+2\beta)\tau]\psi_\vartheta = -2\tau(1-\tau)^{\beta+1}\varphi_\tau, \end{cases} \tag{9}$$

where $\beta = \frac{1}{\gamma - 1}$. On eliminating φ we have

$$2\tau(1-\tau)^{\beta+1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\tau(1-\tau)^{-\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right] + [1-(1+2\beta)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} = 0. \tag{10}$$

One solution of this equation is the radial (source) flow $\psi = k\vartheta$ discussed by G. I. Taylor [1]. Other solutions may be obtained by the method of separation of variables:

$$\psi_n(\tau,\vartheta) = \tau^{n/2} H_n(\tau) \begin{matrix}\sin n\vartheta \\ \cos n\vartheta,\end{matrix} \tag{11}$$

where $H_n(\tau)$ is a solution of the hypergeometric equation

$$\tau(1-\tau)H_n'' + [(n+1) - (n+1-\beta)\tau]H_n' + \tfrac{1}{2}n(n+1)\beta H_n = 0, \tag{12}$$

primes indicating differentiation with respect to τ.

For any n, a solution containing a sonic limit line can be obtained by choosing $H_n(\tau)$ to be a solution of (12) satisfying

$$\frac{d}{d\tau}[\tau^{n/2}H_n(\tau)] = 0, \quad \text{at} \quad \tau = \tau_t \tag{13}$$

where $\tau_t = 1/(2\beta+1)$. For then $\frac{\partial\psi_n}{\partial q} = 0$ for $q = 1/\sqrt{2\beta+1} = q_t$. Since the equation (10) is linear, any linear combination of such solutions (11) will also be a solution containing a sonic limit line.

As a specific example we consider the case $n = 1$. It can easily be seen that in this case the general solution of (12) is, except for an arbitrary constant multiplier

$$H_1(\tau) = \frac{1}{\tau}[\varkappa + (1-\tau)^{\beta+1}],$$

and in order to satisfy (13) we must take $\varkappa = -2(2\beta/2\beta+1)^{\beta}$. Then

$$\psi_1(\tau,\vartheta) = \tau^{-\frac{1}{2}}[\varkappa + (1-\tau)^{\beta+1}] \begin{matrix}\sin\vartheta \\ \cos\vartheta,\end{matrix} \tag{14}$$

and correspondingly we have from (9)

$$\varphi_1(\tau,\vartheta) = \tau^{-\frac{1}{2}}\{\varkappa(1-\tau)^{-\beta} + [1+(1+2\beta)\tau]\} \begin{matrix}\cos\vartheta \\ \sin\vartheta.\end{matrix} \tag{15}$$

We shall now give a discussion of the flow. Additional (non-sonic) limit singularities in the hodograph plane will occur when $\psi_\xi = 0$ or $\psi_\eta = 0$. These relations in our case (14) take the form

$$\tan(180^\circ - \vartheta) = \left[\frac{(2\beta+1)\tau - 1}{1-\tau}\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\varkappa + (1-\tau)^{\beta+1}}{\varkappa + [1+(1+2\beta)\tau](1-\tau)^{\beta}}\right\}, \tag{16}$$

and

$$\tan\vartheta = \left[\frac{(2\beta+1)\tau - 1}{1-\tau}\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\varkappa + (1-\tau)^{\beta+1}}{\varkappa + [1+(1+2\beta)\tau](1-\tau)^{\beta}}\right\}. \tag{17}$$

and correspond to the images l_1 and l_2 of limit lines L_1 and L_2, respectively. They meet the image l_t of the sonic limit line L_t at the point $\tau = 1/(2\beta+1)$, $\vartheta = \pi/2$. At this point $\psi_\xi = \psi_\eta = 0$ as well as $\varphi_\xi = \varphi_\eta = 0$; hence the point furnishes an example of a sonic double limit point.

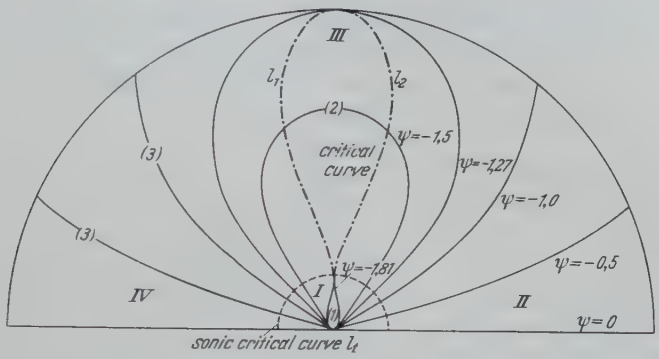

Fig. 2. Hodograph plane

A graph of the critical curves in the hodograph plane as well as selected streamlines for $\gamma = 7/5$ (corresponding to air) is presented in fig. 2. By symmetry we need only consider the upper half of the τ, ϑ-plane, i.e. $0 \leq \vartheta \leq \pi$. The streamlines may be divided into three classes:

1) those which encounter neither the l_t nor the l_1 or l_2 $(-\infty < \psi < -175\sqrt{5}/216)$.

2) those which encounter both the l_t and the l_1 and l_2 $(-175\sqrt{5}/216 < \psi < \varkappa)$.

3) those which encounter only the l_t $(\varkappa < \psi < 0)$.

All streamlines 2) and 3) meet the l_t orthogonally in the hodograph plane, in accord with the general theory of the l_t developed in section 3. The behavior of the streamlines in the physical plane is found to be radically different in the three cases.

We now revert to the physical plane. From (4), (14), and (15)

$$dx = -[\varkappa\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} + \beta + \tau^{-1}]\sin 2\vartheta\, d\vartheta + \tfrac{1}{2}\beta\varkappa\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}d\tau + \\ + \tfrac{1}{2}(2\beta+1)\tau^{-1}d\tau - \tfrac{1}{2}\tau^{-2}\{\varkappa(1-\tau)^{-\beta-1}[1-(1+\beta)\tau]+1\}\cos 2\vartheta\, d\tau,$$

$$dy = -[\varkappa\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} + \beta + \tau^{-1}]\cos 2\vartheta\, d\vartheta + (\beta+1)\,d\vartheta - \\ - \tfrac{1}{2}\tau^{-2}\{\varkappa(1-\tau)^{-\beta-1}[1-(1+\beta)\tau]+1\}\sin 2\vartheta\, d\tau.$$

Hence on integrating and deleting a non-essential constant of integration

$$(18)\quad \begin{cases} 2x = [\varkappa\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} + \beta + \tau^{-1}]\cos 2\vartheta + \varkappa\beta\int\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}d\tau + \\ \qquad\qquad + (2\beta+1)\log\tau, \\ 2y = [\varkappa\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta} + \beta + \tau^{-1}]\sin 2\vartheta - (\beta+1)(2\vartheta). \end{cases}$$

For $\beta = 5/2$ $(\gamma = 7/5)$ the integral in the first expression of (17) can be evaluated in closed form and is in fact

$$\int\tau^{-1}(1-\tau)^{-\beta-1}d\tau = \log\frac{1-\sqrt{1-\tau}}{1+\sqrt{1-\tau}} + \frac{2}{5}\frac{1}{(1-\tau)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{3}\frac{1}{(1-\tau)^{\frac{3}{2}}} + 2\frac{1}{(1-\tau)^{\frac{1}{2}}}.$$

The flow in the physical plane can now be obtained by eliminating τ and ϑ between equations (18) and (14). The limit lines are given by (18), (16), and (17).

A sketch of the curves in the physical plane corresponding to the critical curves and the streamlines shown in the hodograph plane is presented in fig. 3. Again from symmetry considerations we may restrict ourselves to mapping only the upper half of the τ, ϑ-plane. It may be seen that the streamlines of group 1) show no abnormal behavior and are entirely subsonic;

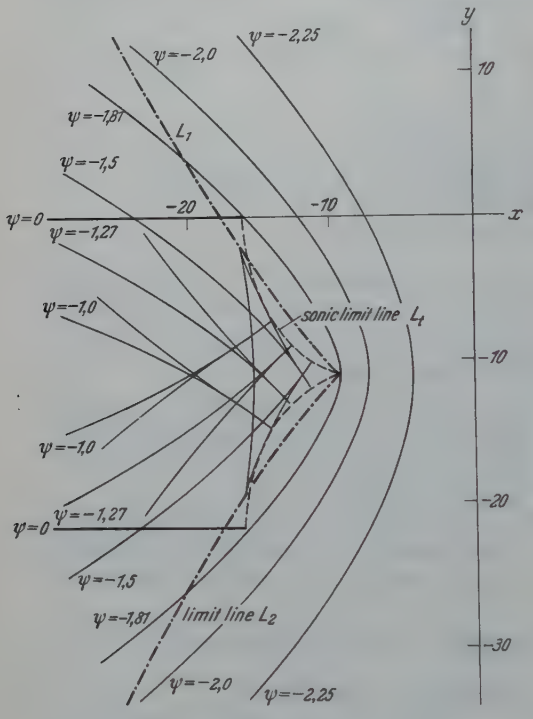

Fig. 3. Physical plane

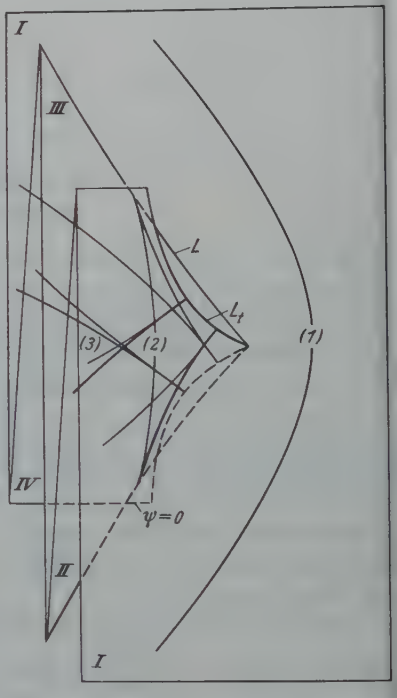

Fig. 4. Sketch of multi-sheeted surface corresponding to physical plane

however, those of group 2) and 3) have singular points on the limit lines. More specifically, the streamlines of group 3) exhibit a cusp on meeting a branch of the L_t and those of group 2) meet the L_1 and L_2 and each branch of the L_t in a cusp. The behavior of the streamlines of group 2) and 3) becomes clearer if the physical plane is envisaged as a quadruply-sheeted surface (see fig. 4). The individual sheets correspond to the regions (denoted by Roman numerals in fig. 2) of the hodograph plane which are bounded by the arcs of the critical curves and the straight streamlines. On each reflection at a limit line the streamline must then be thought of as passing from one sheet to another. In this example there are no regular streamlines along which the flow is supersonic as well as subsonic. Only the streamline

which separates the streamlines of groups 1) and 2) reaches sonic speed on passing through the cusp of the L_t.

The isovels ($\tau = \text{const}$) in the physical plane are portions of trochoids; in the special case $\tau = 1/(2\beta + 1)$ of the L_t, the curve is a segment of a cycloid. The non-sonic limit lines form a cusp which coincides with the cusp point of the L_t at the sonic double limit point. Moreover the cusp directions of the two curves coincide at this point.

Bibliography

[1] Taylor, G. I.: Some cases of flow of compressible fluids. ARC Reports and Memoranda, No. 1382 (1930). — [2] Ringleb, F.: Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. ZAMM **20**, 185—198, 295—296 (1940). — [3] Ringleb, F.: Über die Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Dtsch. Math. **5**, 377—384 (1940). — [4] Temple, G., and J. Yarwood: Compressible flow in a convergent-divergent nozzle. ARC Reports and Memoranda, No. 2077 (1942). — [5] Craggs, J. W.: The breakdown of the hodograph transformation for irrotational compressible fluid flow in two dimensions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **44**, 360—379 (1948). — [6] Lighthill, M. J.: The hodograph method. Chap. VII in Modern Developments in Fluid Dynamics. High Speed Flow. (Ed. by L. Howarth). Oxford: 1953. — [7] Geiringer, H.: Grenzlinien der Hodographentransformation. Math. Z. **63**, 514—524 (1956).

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland

(Eingegangen am 1. Dezember 1956)

Schäfke, F. W.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 238—251 (1957)

Integrale über Produkte von Sphäroidfunktionen

Von
Friedrich Wilhelm Schäfke

Einleitung

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit Sphäroidfunktionen, d.h. mit den Lösungen der Differentialgleichung

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + \left[\lambda + \gamma^2(1-z^2) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right] y(z) = 0,$$

die bei der Separation der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in rotationselliptischen Koordinaten auftritt. Die Note schließt sich eng an das Werk von J. Meixner und F. W. Schäfke [1][1]) an, zu dem sie in verschiedener Hinsicht Ergänzungen gibt.

Betrachtet werden zwei Typen von Integralrelationen, die Produkte von Sphäroidfunktionen betreffen.

Den im Abschnitt 1. behandelten Integralrelationen 1. Art liegt der Gedanke zugrunde, die von den Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblemen her vertraute Methode zum Beweise von Orthogonalitätsrelationen zu verknüpfen mit Aussagen über das asymptotische Verhalten von Sphäroidfunktionen für große Werte des Arguments. Man betrachtet zwei Funktionen $y_1(z)$, $y_2(z)$ zum gleichen γ^2, jedoch zu verschiedenen Parameterpaaren λ_1, μ_1^2 bzw. λ_2, μ_2^2. Schreibt man die entsprechenden Differentialgleichungen auf, multipliziert mit y_2 bzw. y_1, subtrahiert und integriert längs eines Weges $\mathfrak{C}$ zwischen a und b, der $+1$ und -1 nicht treffen möge, so entsteht

$$(1)\quad \begin{cases} (z^2-1)\left(y_1'(z)\,y_2(z) \quad y_1(z)\,y_2'(z)\right)_{a\,(\mathfrak{C})}^{b} \\ \qquad = (\lambda_1-\lambda_2)_{(\mathfrak{C})}\int_a^b y_1(z)\,y_2(z)\,dz + (\mu_1^2-\mu_2^2)_{(\mathfrak{C})}\int_a^b (z^2-1)^{-1}\,y_1(z)\,y_2(z)\,dz. \end{cases}$$

Hier ist es nun möglich, für Funktionen y_1, y_2 mit geeignetem asymptotischen Verhalten bzw. Umlaufsverhalten bzw. mit geeigneten Eigenschaften bei $+1$ (oder -1) a und b längs gewisser Strahlen gegen ∞ rücken zu lassen oder auch etwa $a \to +1$, derart daß dabei der Grenzwert der linken Seite explizit angegeben werden kann und die Existenz der Integrale rechts feststeht. Diese Methode dürfte sich zuerst bei Flammer [2] finden (vgl. das Zitat bei I. Marx [3]), jedoch dort nur für $\mu_1^2 = \mu_2^2$, für Funktionen ganzer Ordnung und ganzen Grades und für $a \to +1$. Die in 1. gegebenen Relationen stellen

[1]) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die am Schluß notierte Literatur.

wesentliche Verallgemeinerungen dar. Als bemerkenswerte Folgerung ergibt sich eine Formel für die Ableitung $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$.

Die in 2. behandelten Integralrelationen 2. Art knüpfen an die Bemerkung an, daß mit einer Funktion u auch deren Ableitungen nach einer kartesischen Koordinate der Schwingungsgleichung genügen, also gemäß [1], Abschnitt 1.133., Satz 1 zur Aufstellung von Kernen für Integralbeziehungen zwischen Sphäroidfunktionen dienen können. Wählt man hier u als in rotationselliptischen Koordinaten separierte Lösung der Schwingungsgleichung, so erhält man gewisse Integrale, die Produkte von Sphäroidfunktionen enthalten. Dieser Gedanke wird hier für beliebig komplexe Parameter und Variable vollständig durchgeführt. Die Methode findet sich wohl zuerst bei Whittaker [5] für Mathieusche Funktionen, für dieselben Funktionen allgemeiner in [1], Abschnitt 2.83. Einen entsprechenden Ansatz für Sphäroidfunktionen, jedoch nur für Funktionen ganzer Ordnung und ganzen Grades im Reellen, hat Marx [3] gegeben. Allerdings fehlt dort die explizite Angabe der Relationen, da die entscheidenden Konstanten nicht in geeigneter Weise bestimmt werden. Ferner finden sich dort etwas irreführende Bemerkungen über die Auffassung derartiger Integralrelationen als „Rekursionsformeln" für Sphäroidfunktionen.

Hierzu, d.h. zur Frage der Existenz derartiger Rekursionen, finden sich in 4. einige kritische Bemerkungen.

Zuvor wird in 3. kurz gezeigt, was die angegebenen Methoden für andere Klassen von speziellen Funktionen liefern. Insbesondere wird die zweite genannte Methode für Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen angesetzt. Es zeigt sich, daß man hier in sehr einfacher Weise die entsprechenden Rekursionsformeln erhält. Das liegt daran, daß hier die entstehenden Kerne in einfacher Weise ausgeartet sind. Das ist jedoch für Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen nicht mehr der Fall.

1. Integralrelationen 1. Art

11. Die Grundrelation

Wir knüpfen an die in der Einleitung gegebene Formel (1) an. Es seien ν_1 bzw. ν_2 charakteristische Exponenten zu $\lambda_1, \gamma^2, \mu_1^2$ bzw. zu $\lambda_2, \gamma^2, \mu_2^2$ mit $\gamma^2 \neq 0$, derart daß

$$\lambda_1 = \lambda_{\nu_1}^{\mu_1}(\gamma^2), \qquad \lambda_2 = \lambda_{\nu_2}^{\mu_2}(\gamma^2) \tag{2}$$

(vgl. [1], 3.531.). Dabei sei *vorausgesetzt*

$$\nu_1 \not\equiv \tfrac{1}{2} \pmod 1, \qquad \nu_2 \not\equiv \tfrac{1}{2} \pmod 1.$$

Wir wählen nun (vgl. [1], 3.64.)

$$y_1(z) = S_{\nu_1}^{\mu_1(1)}(z;\gamma), \qquad y_2(z) = S_{\nu_2}^{\mu_2(1)}(z;\gamma). \tag{3}$$

Dabei ist das Vorzeichen von γ willkürlich. Wir setzen nach seiner Festlegung

$$\alpha = -\arg\gamma \tag{4}$$

mit der Verabredung

$$-\pi < \alpha \leq \pi. \tag{5}$$

Dann gilt einmal für den Umlauf um $+1$ und -1 zugleich ([1], 3.65. (48))

$$y_1(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu_1}\,y_1(z), \qquad y_2(z\,e^{2\pi i}) = e^{2\pi i\nu_2}\,y_2(z), \tag{6}$$

andererseits nach [1], 3.65. (49), (50) für den Grenzübergang

$$z \to \infty, \qquad \arg z = \alpha \qquad (\arg\gamma z = 0)$$

sicher ($\varkappa = 1, 2$)

$$\begin{cases} y_\varkappa(z) = \dfrac{1}{\gamma z}\cos\left(\gamma z - \dfrac{\nu_\varkappa + 1}{2}\pi\right) + O\left(\dfrac{1}{z^2}\right), \\ y_\varkappa'(z) = -\dfrac{1}{z}\sin\left(\gamma z - \dfrac{\nu_\varkappa + 1}{2}\pi\right) + O\left(\dfrac{1}{z^2}\right) \end{cases} \tag{7}$$

(zur letzten Zeile vgl. [1], 3.64., S. 291). Daraus folgt, daß beim gleichen Grenzübergang gilt

$$(z^2-1)\left(y_1'(z)\,y_2(z) - y_1(z)\,y_2'(z)\right) \to \frac{1}{\gamma}\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\pi. \tag{8}$$

Wir wählen nun in (1) den Integrationsweg der Fig. 1.

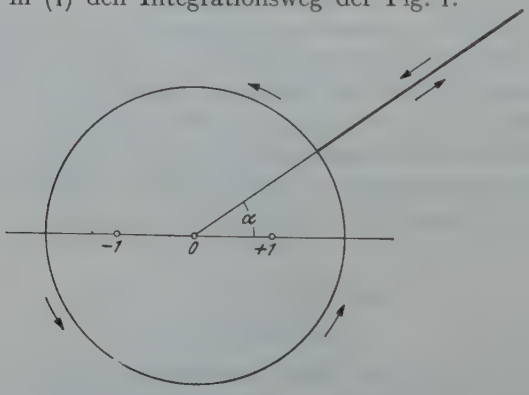

Fig. 1. Der Integrationsweg für (9)

Dann hat man mit Hilfe von (6) sofort[2])

$$\begin{cases} \left(\lambda_{\nu_1}^{\mu_1}(\gamma^2) - \lambda_{\nu_2}^{\mu_2}(\gamma^2)\right) \overset{(+1+,\,-1+)}{\underset{\infty\, e^{i\alpha}}{\int}} S_{\nu_1}^{\mu_1(1)}(z;\gamma)\, S_{\nu_2}^{\mu_2(1)}(z;\gamma)\,dz + \\ \qquad + (\mu_1^2 - \mu_2^2) \overset{(+1+,\,-1+)}{\underset{\infty\, e^{i\alpha}}{\int}} (z^2-1)^{-1}\, S_{\nu_1}^{\mu_1(1)}(z;\gamma)\, S_{\nu_2}^{\mu_2(1)}(z;\gamma)\,dz \\ \qquad\qquad = (e^{2\pi i(\nu_1+\nu_2)} - 1)\,\frac{1}{\gamma}\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\pi. \end{cases} \tag{9}$$

[2]) Zur Bezeichnung vgl. [1], S. 251 ff.

Es zeigt sich nun, daß die Wahl (3) keine besondere Einschränkung darstellt. Denn man hat stets

$$\lambda_\nu^\mu(\gamma^2) = \lambda_{-\nu-1}^\mu(\gamma^2),$$

und $S_\nu^{\mu(1)}(z;\gamma)$, $S_{-\nu-1}^{\mu(1)}(z;\gamma)$ bilden ein Fundamentalsystem. Man kann daher ν_1 durch $-\nu_1-1$ oder bzw. und ν_2 durch $-\nu_2-1$ ersetzen. Man hat dann vier Formeln der Form (9), mit deren Hilfe alle Ausdrücke

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int y_1 y_2\,dz + (\mu_1^2-\mu_2^2)\int (z^2-1)^{-1} y_1 y_2\,dz$$

ausgewertet werden können, falls für die $y_\varkappa(z)$ $(\varkappa=1,2)$ die Darstellungen als Linearkombinationen von $S_{\nu_\varkappa}^{\mu_\varkappa(1)}(z;\gamma)$, $S_{\nu_\varkappa-1}^{\mu_\varkappa(1)}(z;\gamma)$ gegeben sind. Wir gehen hier auf derartige Folgerungen allgemein nicht näher ein.

Einfach werden natürlich die Formeln für $\lambda_1=\lambda_2$ oder $\mu_1^2=\mu_2^2$. Hier sei nur noch einiges für den zweiten Fall besprochen. Wir setzen im folgenden

$$\mu_1=\mu_2=\mu.$$

Unter dieser Annahme sollen einige Spezialfälle und Ausartungen von (9) notiert werden.

12. Integrationswege mit Umlauf um +1

Zuerst eine grundsätzliche Überlegung.

Wir wählen y_1 und y_2 so, daß ihr Produkt bei $+1$ regulär analytisch wird, also etwa (γ^2 sei nicht Ausnahmewert)

$$y_1 = \mathrm{Ps}_{\nu_1}^{\mu}(z;\gamma^2), \qquad y_2 = \mathrm{Ps}_{\nu_2}^{-\mu}(z;\gamma^2).$$

Dann kann der Integrationsweg über $+1$ hinweggezogen werden. Nach Substitution $z\to -z$ erhält man dann entsprechende Integrale mit dem Integrationsweg der Fig. 2. Diese Herleitung ist wegen der doppelten Umrechnung vielleicht etwas umständlich. Es kam nur darauf an, zu zeigen, daß die im folgenden gegebenen Relationen als Folgerungen aus (9) aufgefaßt werden können.

Wir wählen zur Aufstellung der Relationen mit dem Integrationsweg der Fig. 2 lieber einen mehr direkten Weg.

Wir nehmen für

$$\alpha = -\arg\gamma$$

jetzt (wegen der Stelle -1)

$$|\alpha| < \pi \tag{10}$$

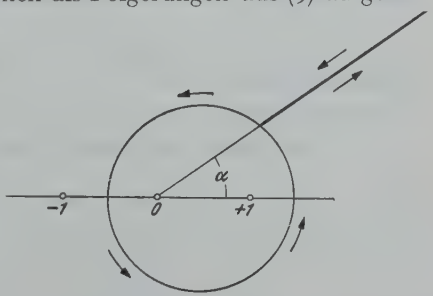

Fig. 2. Der Integrationsweg für (14)

an, was wegen $\gamma\to -\gamma$ keine Einschränkung bedeutet. Wir wählen dann

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{\nu_1}^{\mu}(\gamma^2), & \lambda_2 = \lambda_{\nu_2}^{\mu}(\gamma^2), \qquad \nu_\varkappa \not\equiv \tfrac{1}{2} \pmod 1, \\ y_1 = \mathrm{Ps}_{\nu_1}^{\mu}(z;\gamma^2), & y_2 = \mathrm{Ps}_{\nu_2}^{\mu}(z;\gamma^2). \end{cases} \tag{11}$$

Dann multipliziert sich $y_1(z) \cdot y_2(z)$ bei positivem Umlauf um $+1$ mit $e^{-2\pi i\mu}$. Da wir auch das asymptotische Verhalten benötigen, notieren wir die Formel (nach [1], 3.61. (4) und 3.66. (56))

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Ps}_\nu^\mu(z;\gamma^2) \\ &= \frac{1}{\cos\nu\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu-\mu+1)\,V_\nu^\mu(\gamma)}\,S_\nu^{\mu(1)}(z;\gamma) - \frac{1}{\Gamma(-\nu-\mu)\,V_{-\nu-1}^\mu(\gamma)}\,S_{-\nu-1}^{\mu(1)}(z;\gamma)\right]. \end{aligned}\right.$$

Mit ihrer Hilfe kann für den Grenzübergang

$$z \to \infty, \qquad \arg z = \alpha \qquad (\arg \gamma z = 0)$$

erhalten werden:

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &(z^2-1)\left(y_1'(z)\,y_2(z) - y_1(z)\,y_2'(z)\right) \to \frac{1}{\gamma\cos\nu_1\pi\cos\nu_2\pi} \times \\ &\times\left\{\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\pi\cdot\left[\frac{1}{\Gamma(\nu_1-\mu+1)\,\Gamma(\nu_2-\mu+1)\,V_{\nu_1}^\mu(\gamma)\,V_{\nu_2}^\mu(\gamma)} - \right.\right. \\ &\qquad\left. - \frac{1}{\Gamma(-\nu_1-\mu)\,\Gamma(-\nu_2-\mu)\,V_{-\nu_1-1}^\mu(\gamma)\,V_{-\nu_2-1}^\mu(\gamma)}\right] + \\ &+ \sin\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2}\pi\cdot\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu_1-\mu)\,\Gamma(\nu_2-\mu+1)\,V_{-\nu_1-1}^\mu(\gamma)\,V_{\nu_2}^\mu(\gamma)} - \right. \\ &\qquad\left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\nu_1-\mu+1)\,\Gamma(-\nu_2-\mu)\,V_{\nu_1}^\mu(\gamma)\,V_{-\nu_2-1}^\mu(\gamma)}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Wir kürzen die rechte Seite mit $C(\nu_1, \nu_2, \mu, \gamma^2)$ ab. Aus (1) folgt dann mit (13) und der Umlaufseigenschaft:

$$(14)\quad \left(\lambda_{\nu_1}^\mu(\gamma^2) - \lambda_{\nu_2}^\mu(\gamma^2)\right)\int_{\infty e^{i\alpha}}^{(+1+)} \mathrm{Ps}_{\nu_1}^\mu(z;\gamma^2)\,\mathrm{Ps}_{\nu_2}^\mu(z;\gamma^2)\,dz = (e^{-2\pi i\mu}-1)\,C(\nu_1,\nu_2,\mu,\gamma^2).$$

13. Integrationsstrahl von $+1$ aus

Ist $\Re\,\mu < 1$, so ist Integration an $+1$ heran möglich und man hat aus (14):

$$(15)\quad \left(\lambda_{\nu_1}^\mu(\gamma^2) - \lambda_{\nu_2}^\mu(\gamma^2)\right)\int_1^{\infty e^{i\alpha}} \mathrm{Ps}_{\nu_1}^\mu(z;\gamma^2)\,\mathrm{Ps}_{\nu_2}^\mu(z;\gamma^2)\,dz = C(\nu_1,\nu_2,\mu,\gamma^2).$$

Dies folgt aus (14) zunächst für nicht ganzes μ, damit dann allgemein durch Grenzübergang.

Eine besondere Vereinfachung ergibt sich für den Fall, daß $\nu_1+\mu$ und $\nu_2+\mu$ nicht-negativ ganz sind. Wegen $\Re\,\mu<1$ ist dann von selbst

$$\nu_\varkappa - \mu \neq -1, -2, -3, \ldots$$

und man hat nach [1], 3.66. (67):

$$S_{\nu_\varkappa}^{\mu(1)}(z;\gamma) = K_{\nu_\varkappa}^\mu(\gamma)\,\mathrm{Ps}_{\nu_\varkappa}^\mu(z;\gamma^2).$$

Damit kann man gemäß (13), (15) — oder auch leicht direkt mit (8) — schreiben:

$$(16)\quad \left(\lambda_{\nu_1}^\mu(\gamma^2) - \lambda_{\nu_2}^\mu(\gamma^2)\right)\int_1^{\infty e^{i\alpha}} S_{\nu_1}^{\mu(1)}(z;\gamma)\,S_{\nu_2}^{\mu(1)}(z;\gamma)\,dz = \frac{1}{\gamma}\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\pi.$$

Für ganze μ und damit auch ganze ν_1, ν_2, ferner für $\gamma > 0$ entsteht daraus die Formel von FLAMMER [2], bzw. von MARX [3], S. 271, Formel (7).

14. Eine Folgerung für die Ableitung $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$.

Wir knüpfen an (9) an, wo wir wieder $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ wählen. Wir wollen voraussetzen, daß γ^2 nicht Ausnahmewert für $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ ist (vgl. [1], 3.531.). Wir setzen $\nu_2 = -\nu - 1$ und machen den Grenzübergang $\nu_1 \to \nu$, nachdem wir beide Seiten durch $\nu_1 - \nu$ dividiert haben. Im Integral kann offenbar einfach $\nu_1 = \nu$ gesetzt werden und man kann mit [1], 3.66. (56), 3.544. (26) auswerten:

$$\begin{aligned}
&\int_{\infty \varepsilon^{i\alpha}}^{(+1+,\,-1+)} S_\nu^{\mu(1)}(z;\gamma)\, S_{-\nu-1}^{\mu(1)}(z;\gamma)\, dz \\
&\qquad = V_\nu^\mu(\gamma)\, V_{-\nu-1}^\mu(\gamma) \oint \tilde{Q}s_\nu^\mu(z;\gamma^2)\, \tilde{Q}s_{-\nu-1}^\mu(z;\gamma^2)\, dz \\
&\qquad = 2\pi i \frac{\cos \nu\pi}{2\nu+1} V_\nu^\mu(\gamma)\, V_{-\nu-1}^\mu(\gamma).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch [1], 3.66. (58), so hat man schließlich die vielleicht bemerkenswerte Relation

$$\frac{\partial \lambda_\nu^\mu(\gamma^2)}{\partial \nu} = (2\nu+1)\, A_\nu^\mu(\gamma^2)\, A_\nu^{-\mu}(\gamma^2). \tag{17}$$

Man kann sie natürlich für $\gamma^2 = 0$, $\lambda_\nu^\mu = \nu(\nu+1)$ unmittelbar bestätigen.

2. Integralrelationen 2. Art

21. Vorbemerkungen

Wir knüpfen an den Abschnitt über gestreckt-rotationselliptische Koordinaten 1.123. in [1] an. Wir betrachten eine Funktion u einmal in Abhängigkeit von x_1, x_2, x_3, zum andern in Abhängigkeit von ξ, η, φ. Wir drücken die partiellen Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 durch die nach ξ, η, φ aus. Das kann entweder ziemlich direkt oder auch mit Hilfe von 1.123., (15*) geschehen. Wir notieren:

$$\left\{\begin{aligned}
c\frac{\partial u}{\partial x_3} &= \frac{\eta(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
c\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\xi\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \eta} - \\
&\qquad - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\
c\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\xi\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \eta} + \\
&\qquad + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Wir fassen noch zusammen:

$$(19)\quad \begin{cases} c\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \pm i\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\ \qquad = e^{\pm i\varphi}\left\{\dfrac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2}\left[\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right] \pm i\dfrac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right\}. \end{cases}$$

Nun bemerken wir:

Ist $u(\xi, \eta, \varphi)$ eine für ξ, η, φ in einem Gebiete bezüglich der drei komplexen Variablen, in dem $\xi \neq \pm 1$, $\eta \neq \pm 1$, $\xi \neq \pm\eta$ gilt, regulär analytische Lösung der Schwingungsgleichung in gestreckt-rotationselliptischen Koordinaten ($\gamma = k\,c$)

$$(20)\quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left((\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left((1-\eta^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \gamma^2(\xi^2-\eta^2)u = 0,$$

so gilt dasselbe für die mit u gebildeten Ausdrücke auf den rechten Seiten von (18) und (19).

Das folgt aus der Tatsache, daß mit u auch $\dfrac{\partial u}{\partial x_\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + k^2 u = 0$$

genügen, und aus der Bemerkung, daß die Umrechnungen von x_1, x_2, x_3 auf ξ, η, φ im Komplexen genau so verlaufen wie im Reellen.

22. Aufstellung der Kerne

Wir wählen nun speziell u als separierte Lösung von (20), also etwa ($\gamma^2 \neq 0$)

$$(21)\qquad u(\xi, \eta, \varphi) = S_\nu^{\mu(j)}(\xi; \gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta; \gamma^2)\,e^{i\mu\varphi}.$$

Mit dieser Form erfassen wir alle separierten Lösungen durch Bildung von Linearkombinationen, indem wir die möglichen Substitutionen $\mu \to -\mu$ oder bzw. und $\nu \to -\nu - 1$ und etwa $j = 3, 4$ beachten. Dabei ist stets ([*1*], 3.65. (45), 3.543. (23*))

$$S_\nu^{-\mu(j)} = S_\nu^{\mu(j)}, \qquad \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{-\mu} = \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu.$$

Bilden wir nun mit (21) den Ausdruck der rechten Seite der ersten Zeile von (18), so entsteht

$$(22)\qquad v_1(\xi, \eta)\,e^{i\mu\varphi}$$

mit

$$(22^*)\quad \begin{cases} v_1(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\xi^2-\eta^2} \times \\ \qquad \times\left[\eta(\xi^2-1)\,S_\nu^{\mu(j)'}(\xi; \gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta; \gamma^2) + \xi(1-\eta^2)\,S_\nu^{\mu(j)}(\xi; \gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu'}(\eta; \gamma^2)\right]. \end{cases}$$

Hier bedeutet, wie stets auch im folgenden, der Strich (′) die Ableitung nach dem ersten Argument (ξ bzw. η).

Bilden wir mit (21) bei oberem Vorzeichen den Ausdruck auf der rechten Seite von (19), so entsteht (bis auf konstanten Faktor)

(23) $$v_2(\xi,\eta)\, e^{i(\mu+1)\varphi}$$

mit

(23*) $$\begin{cases} v_2(\xi,\eta) \\ \quad = \dfrac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2-\eta^2}\left[\xi\, S_\nu^{\mu(j)\prime}(\xi;\gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2) - \eta\, S_\nu^{\mu(j)}(\xi;\gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu\prime}(\eta;\gamma^2)\right] - \\ \quad - \dfrac{\mu}{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}}\, S_\nu^{\mu(j)}(\xi;\gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2). \end{cases}$$

Bildet man dasselbe mit unterem Vorzeichen, so erhält man unten nichts Neues, da dasselbe auch mit den Substitutionen $\mu \to -\mu$ bzw. $\mu+1 \to -\mu-1$ erreicht werden kann, die unabhängig geschehen können, wie die folgenden Überlegungen sofort zeigen.

(22) und (23) sind nun nach den vorangehenden Bemerkungen Lösungen von (20), und zwar in der Form, daß die φ-Abhängigkeit schon abseparierte ist. Damit sind wir in der Lage, (22*) und (23*) als Kerne gemäß [*1*], 1.133., Satz 1 zu verwenden. Dort hat man nur bei Betrachtung von (23*) μ durch $\mu+1$ zu ersetzen.

23. Die Integralrelationen

Für die Anwendung des genannten Satzes kommt es nun auf die Wahl geeigneter Integrationswege und die Erfüllung der weiteren Voraussetzungen an.

Wir wählen einen Integrationsweg der η-Ebene, der $+1$ und -1 einmal positiv umläuft, und als Funktion u_2 mit ganzem p bei dem Kern (22*) die Funktion

$$u_2(\eta) = \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu}(\eta;\gamma^2),$$

bei (23*) entsprechend

$$u_2(\eta) = \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu+1}(\eta;\gamma^2).$$

ξ lassen wir außerhalb dieses Integrationsweges variieren und verabreden eindeutig

$$(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}} \sim \xi \qquad (\xi \to \infty).$$

Entsprechend wird $(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}$ in der längs der Strecke zwischen $+1$ und -1 aufgeschnittenen Ebene eindeutig erklärt. Dann sind offenbar alle Voraussetzungen von [*1*], 1.133., Satz 1 erfüllt auf Grund der Umlaufsrelationen

$$\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(z\,e^{2\pi i};\gamma^2) = e^{-2\pi i(\nu+1)}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(z;\gamma^2).$$

Somit ist

(24) $$\oint v_1(\xi,\eta)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,d\eta$$

eine Sphäroidfunktion zu den Parametern $\lambda_{\nu+p}^{\mu}(\gamma^2)$, γ^2, μ^2 und

(25) $$\oint v_2(\xi,\eta)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu+1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta$$

eine Sphäroidfunktion zu $\lambda_{\nu+p}^{\mu+1}(\gamma^2), \gamma^2, (\mu+1)^2$. Natürlich nehmen wir an, daß γ^2 niemals Ausnahmewert ist.

Zur Entscheidung darüber, um welche Sphäroidfunktion es sich in (24) bzw. (25) handelt, untersuchen wir ihr asymptotisches Verhalten für $\xi \to \infty$ bei $|\arg \gamma\xi| \leqq \pi - \delta$, $\delta > 0$, wobei wir [1], 3.65. (49), (50) beachten. Wir erkennen, daß gleichmäßig bezüglich η auf dem Integrationswege

$$v_1(\xi,\eta) = \pm i \frac{1}{\xi} e^{\pm i\left(\gamma\xi - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}\left(\eta\, \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2) + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \tag{26}$$

und

$$v_2(\xi,\eta) = \pm i \frac{1}{\xi} e^{\pm i\left(\gamma\xi - \frac{\nu+1}{2}\pi\right)}\left((\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2) + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \tag{27}$$

gilt, wobei das obere Vorzeichen für $j=3$, das untere für $j=4$ zu wählen ist. Stets gibt das Glied mit $S_\nu^{\mu(j)'}(\xi;\gamma)$ den Ausschlag. Da die kritische Gerade $\arg\gamma\xi = 0$ mit umfaßt wird, ist somit eindeutig durch (24) die Funktion

$$\gamma(\pm i)^{p+1}\oint \eta\, \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2)\, \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^\mu_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\, d\eta \cdot S_{\nu+p}^{\mu(j)}(\xi;\gamma) \tag{28}$$

und durch (25) die Funktion

$$\gamma(\pm i)^{p+1}\oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^\mu(\eta;\gamma^2)\, \tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^\mu_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\, d\eta \cdot S_{\nu+p}^{\mu+1(j)}(\xi;\gamma) \tag{29}$$

dargestellt.

Wir verzichten darauf, die erhaltenen Integralrelationen durch Zusammenfügung von (22*), (24), (28) bzw. (23*), (25), (29) bei nochmaliger Nennung der Voraussetzungen in zwei Formelzeilen aufzuschreiben.

24. Bemerkungen

a) Auf Grund der Halbumlaufsrelationen der Funktionen $\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}$ sind die Integrale in (28), (29) beide 0, wenn p eine gerade Zahl ist. Aus demselben Grunde könnte man für ungerades p auf Integrale über einen halben Umlauf übergehen. Dort kann $(\pm i)^{p+1} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$ gesetzt werden.

b) Für $\nu+\mu = -1, -2, -3, \ldots$ und $-\nu-p-1-\mu = -1, -2, -3, \ldots$ bzw. $-\nu-p-2-\mu = -1, -2, -3, \ldots$ ist der Integrand in (28) bzw. (29) bei $+1$ und -1 regulär analytisch und die Integrale verschwinden ebenfalls. (Vgl. [1], 3.534. und 3.61. (4).)

c) Für $\Re e\,\mu > -1$, $\nu+\mu = -1, -2, -3, \ldots$ und $-\nu-p-1-\mu = 0, 1, 2, \ldots$ bzw. $-\nu-p-2-\mu = 0, 1, 2, \ldots$ kann das Integral in (28) bzw. (29) — man beachte dazu Bemerkung a) — in ein Integral über die Strecke von -1 bis $+1$ umgerechnet werden, in dessen Integrand die Funktionen $\mathrm{ps}_\nu^{-\mu}$ und $\mathrm{ps}_{\nu+p}^{-\mu}$ bzw. $\mathrm{ps}_{\nu+p}^{-\mu-1}$ erscheinen. Analog in (24), (25).

Die Bemerkungen b) und c) interessieren insbesondere für den Fall der Sphäroidfunktionen ganzer Ordnung und ganzen Grades. Wir verzichten

jedoch darauf, derartige Formeln explizit zu notieren. Ihre Gewinnung bietet mit den gegebenen Bemerkungen und den Formeln von [1] keine Schwierigkeiten.

d) Nach [1], 3.544. sind die erhaltenen Integralrelationen äquivalent zu Entwicklungen der Kerne $v_1(\xi,\eta)$, $v_2(\xi,\eta)$ nach Produkten von Sphäroidfunktionen

$$S^{\mu\,(j)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu+p}(\eta;\gamma^2)$$

bzw.

$$S^{\mu+1\,(j)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{\nu+p}(\eta;\gamma^2)$$

mit ungeradem p. Im Falle b), c) kann man hier wieder die $\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu+p}$, $\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu-1}_{\nu-p}$ durch die $\mathrm{ps}^{-\mu}_{\nu+p}$, $\mathrm{ps}^{-\mu-1}_{\nu+p}$ ersetzen.

25. Folgerungen

Schreibt man die beiden Integralrelationen je für $j=3$ und $j=4$ auf, so kann man durch Auflösung linearer Gleichungssysteme Ausdrücke für die Integrale

(30) $$\oint \frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta,$$

(31) $$\oint \frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu'}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta,$$

(32) $$\oint \frac{(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^2-\eta^2}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta,$$

(33) $$\oint \frac{(\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\eta}{\xi^2-\eta^2}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu'}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta$$

gewinnen (vgl. [1], 2.83. für Mathieusche Funktionen). Man erhält für sie der Reihe nach

(34) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma^2}{2i}(-1)^{\frac{p+1}{2}}\oint \eta\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta\times\\&\qquad\times\left[S^{\mu\,(3)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(4)}_{\nu}(\xi;\gamma)-S^{\mu\,(4)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(3)}_{\nu}(\xi;\gamma)\right],\end{aligned}\right.$$

(35) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma^2}{2i}(-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{(\xi^2-1)}{\xi}\oint \eta\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta\times\\&\qquad\times\left[S^{\mu\,(4)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(3)'}_{\nu}(\xi;\gamma)-S^{\mu\,(3)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(4)'}_{\nu}(\xi;\gamma)\right],\end{aligned}\right.$$

(36) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma^2}{2i}(-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\xi}\oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{-\nu-p-1}(\xi;\gamma^2)\,d\eta\times\\&\qquad\times\left[S^{\mu+1\,(3)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(4)}_{\nu}(\xi;\gamma)-S^{\mu+1\,(4)}_{\nu+p}(\eta;\gamma)\,S^{\mu\,(3)}_{\nu}(\xi;\gamma)\right],\end{aligned}\right.$$

(37) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\gamma^2}{2i}(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{-\nu-p-1}(\xi;\gamma^2)\,d\eta\times\\&\qquad\times\left[S^{\mu+1\,(3)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(4)'}_{\nu}(\xi;\gamma)-S^{\mu+1\,(4)}_{\nu+p}(\xi;\gamma)\,S^{\mu\,(3)'}_{\nu}(\xi;\gamma)\right]-\\&\qquad-\frac{\mu}{\xi^2-1}\oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu}_{\nu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}^{\mu+1}_{-\nu-p-1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta.\end{aligned}\right.$$

Bemerkenswert ist ein Vergleich des asymptotischen Verhaltens von (31) und (35) bzw. von (33) und (37). Er liefert mit [1], 3.65., (49), (50), (52)

$$(38)\quad \begin{cases} \oint (\eta^2-1)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu'}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,d\eta \\ = \left[\tfrac{1}{2}\left(\lambda_{\nu+p}^{\mu}(\gamma^2)-\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)\right)-1\right]\oint \eta\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,d\eta \end{cases}$$

und

$$(39)\quad \begin{cases} \oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\eta\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu'}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu+1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta \\ = \left[\tfrac{1}{2}\left(\lambda_{\nu+p}^{\mu+1}(\gamma^2)-\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)\right)-1\right]\oint (\eta^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu+1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta - \\ \qquad -\mu\oint (\eta^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_\nu^{\mu}(\eta;\gamma^2)\,\tilde{\mathrm{Q}}\mathrm{s}_{-\nu-p-1}^{\mu+1}(\eta;\gamma^2)\,d\eta. \end{cases}$$

3. Analoges für andere Klassen spezieller Funktionen

31. Zylinderfunktionen

311. Die Methode von 1. kann natürlich auch auf die Funktionen[3])

$$\psi_\nu^{(j)}(r)=\left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Z}_{\nu-\frac{1}{2}}^{(j)}(r)$$

angewandt werden. Die entsprechende Formel erhält man jedoch sofort aus (9) mit $\gamma\to 0$ gemäß [1], 3.65., (54):

$$(40)\quad \left[\nu_1(\nu_1+1)-\nu_2(\nu_2+1)\right]\int_{\infty e^{i0}}^{(0+)}\psi_{\nu_1}^{(1)}(r)\,\psi_{\nu_2}^{(1)}(r)\,dr=(e^{2\pi i(\nu_1+\nu_2)}-1)\sin\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\pi.$$

312. Die Methode von 2. hat schon WHITTAKER [5] auf Bessel-Funktionen angewandt.

Wir schließen einfach so:

Mit

$$u(r,\varphi)=\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(r)\,e^{i\nu\varphi}$$

ist auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}&=e^{i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\\&=\left[\mathfrak{Z}_\nu^{(j)'}(r)-\frac{\nu}{r}\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(r)\right]e^{i(\nu+1)\varphi}\end{aligned}$$

Lösung der zweidimensionalen Schwingungsgleichung

$$\Delta u+u=0.$$

Daher steht in der eckigen Klammer eine Zylinderfunktion zum Index $\nu+1$. Vergleich des asymptotischen Verhaltens zeigt dann unmittelbar, daß dies

$$-\mathfrak{Z}_{\nu+1}^{(j)}(r)$$

ist.

Die Methode liefert also hier — in überaus einfacher Weise — die Rekursionsformeln der Zylinderfunktionen.

[3]) Bezeichnungen nach [1].

32. Kugelfunktionen

Hier interessiert nur die Methode von 2. Man kann natürlich oben den Grenzübergang $\gamma \to 0$ machen. Mit Hilfe von (38), (39) erhält man dann aus den Integralrelationen die Rekursionsformeln der Funktionen $\psi_\nu^{(j)}(r)$.

Interessanter ist ein Versuch zur Herleitung der Rekursionsformeln der Kugelfunktionen. Wir skizzieren nur den Weg. Er erweist sich zum Teil einfacher als manche der üblichen Herleitungen.

Mit

$$x_1 = r(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi, \qquad x_2 = r(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi, \qquad x_3 = r\eta$$

gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \eta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}(1-\eta^2)\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \pm i \frac{\partial u}{\partial x_2} = e^{\pm i\varphi}\left[(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\eta}{r}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \pm i \frac{1}{r(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right].$$

Wir wählen

$$u = r^\nu \mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)\, e^{i\mu\varphi}$$

als Lösung von $\Delta u = 0$. Dann sind

$$v_1(r,\eta) = (1-\eta^2)\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta)\frac{1}{r}r^\nu + \eta\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)\nu r^{\nu-1}$$

und

$$v_2(r,\eta) = -\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta)\frac{1}{r}r^\nu + (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)\nu r^{\nu-1} \mp \mu(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)\frac{1}{r}r^\nu$$

in r, η separiert.

Betrachten wir zunächst den ersten Kern, so wird nach dem Vorstehenden

$$(1-\eta^2)\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta) + \nu\eta\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)$$

eine Kugelfunktion zu den Indizes $\nu - 1$ und μ. Untersuchung des Verhaltens bei $\eta = +1$:

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1+P(\eta-1))$$

liefert dann sofort, daß dies

$$(\nu+\mu)\mathfrak{P}_{\nu-1}^\mu(\eta)$$

ist. So hat man die grundlegende Rekursion bezüglich ν:

$$(1-\eta^2)\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta) + \nu\eta\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta) = (\nu+\mu)\mathfrak{P}_{\nu-1}^\mu(\eta).$$

Beachtet man $\mathfrak{P}_\nu^\mu = \mathfrak{P}_{-\nu-1}^\mu$, $\mathfrak{P}_{\nu-1}^\mu = \mathfrak{P}_{-\nu}^\mu$ und schreibt man dann statt $-\nu-1$ wieder ν, so kommt auch

$$(1-\eta^2)\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta) - (\nu+1)\eta\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta) = -(\nu-\mu+1)\mathfrak{P}_{\nu+1}^\mu(\eta).$$

Nun zum zweiten Kern! Hier wird analog

$$(\eta^2-1)^{-\frac{1}{2}}\left[(\eta^2-1)(\eta\mathfrak{P}_\nu^{\mu\prime}(\eta) - \nu\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)) \mp \mu\mathfrak{P}_\nu^\mu(\eta)\right]$$

eine Kugelfunktion zu den Indizes $\nu-1, \mu \pm 1$, und zwar, wie das Verhalten bei $\eta=+1$ zeigt, gerade

$$\mathfrak{P}_{\nu-1}^{\mu+1}(\eta)$$

bzw.

$$(\nu+\mu)(\nu+\mu-1)\,\mathfrak{P}_{\nu-1}^{\mu-1}(\eta).$$

Man erhält so auch mit entsprechenden Umformungen die Rekursionen bezüglich μ.

33. Mathieusche Funktionen

Die Methode von 2. ist in [1], 2.83. durchgeführt worden. Man kann überdies oben $\mu=\frac{1}{2}$ setzen und gemäß [1], 3.536. auf Mathieusche Funktionen umrechnen.

4. Zur Frage der Existenz von Rekursionsformeln

Wie wir in 31. und 32. gesehen haben, führt der Gedankengang von 2. für Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen (im letzteren Falle hier anscheinend erstmals durchgeführt) in sehr einfacher und natürlicher Weise zu den Rekursionsformeln dieser Funktionen. Dagegen liefert die Methode für die Mathieuschen Funktionen und Sphäroidfunktionen nur gewisse Relationen, in denen Integrale über Produkte dieser Funktionen auftreten. Man erkennt sogleich, woran dies liegt: Die Kerne sind bei den Zylinder- und Kugelfunktionen in einfacher Weise ausgeartet, nicht dagegen bei den höheren Funktionen.

Es dürfte nun kaum sinnvoll, im Gegenteil offenbar irreführend sein, wenn man die entsprechenden Relationen für die Mathieuschen Funktionen und Sphäroidfunktionen ebenfalls als „Rekursionsformeln" bezeichnen wollte. Dies geschieht leider bei WHITTAKER [5] und MARX [3], [4].

Wohl erhält man Relationen der Form

$$a(\xi;\nu,\gamma^2,\mu^2)\,S_\nu^{\mu(j)'}(\xi;\gamma)+b(\xi;\nu,\gamma^2,\mu^2)\,S_\nu^{\mu(j)}(\xi;\gamma)=S_{\nu+1}^{\mu+1(j)}(\xi;\gamma).$$

Jedoch sind die Koeffizienten a, b durch die zu verknüpfenden Sphäroidfunktionen selbst ausgedrückt. Die von MARX [3], S. 269 geäußerte Hoffnung, für sie einfachere Ausdrücke zu finden, erweist sich durch die folgenden Bemerkungen als trügerisch.

Bezüglich γ^2 sind $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$, $\lambda_{\nu+1}^\mu(\gamma^2)$ im großen unendlich vieldeutige algebroide Funktionen, und zwar verschiedene, damit zugleich auch $S_\nu^{\mu(j)}(\xi;\gamma)$, $S_{\nu+1}^{\mu(j)}(\xi;\gamma)$. Man muß annehmen — erste numerische Resultate für die Eigenwerte $a_m(h^2)$, $b_m(h^2)$ der Mathieuschen Differentialgleichung legen das nahe —, daß jede der beiden Funktionen im großen in der γ^2-Ebene Spurpunkte von Verzweigungsstellen besitzt, die nicht auch solche der anderen sind, und zwar unendlich viele, derart, daß man unabhängig durch geeignete Umlaufswege von ν zu jedem $\nu+2k$ und von $\nu+1$ zu jedem $\nu+2l+1$ übergehen kann (k, l ganz). Dann müssen aber die Funktionen a und b dieselben Eigenschaften haben, also ebenfalls alle diese Verzweigungen von $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ und $\lambda_{\nu+1}^\mu(\gamma^2)$ liefern. So besteht kaum die Aussicht, für a und b Ausdrücke zu finden, die von Sphäroidfunktionen bzw. von ihren Eigenwerten unabhängig wären.

Das ließe jedoch die Möglichkeit zu, daß a und b sich als einfache Funktionen von ξ^{-2} erwiesen und sich entsprechende Konstanten durch $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$, $\lambda_{\nu+1}^\mu(\gamma^2)$ ausdrücken ließen. Jedoch erscheint auch dies bei näherer Betrachtung von (30) bis (37) zusammen mit [1], 3.65., (49), (50), (52) als recht unwahrscheinlich.

Analoges gilt für die „Rekursionsformeln" bezüglich μ gemäß (23*), (25), (29) und für „Rekursionsformeln" der $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$, wie sie MARX [3] im Zusammenhang mit dem Spezialfall von (9) hinschreibt.

Literatur

[1] MEIXNER, J., u. F. W. SCHÄFKE: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. In Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 71. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. — [2] FLAMMER, C.: Prolate spheroidal wave functions. Stanford Research Institute Technical Report No. 16, 1952. — [3] MARX, I.: Recurrence relations for prolate spheroidal wave functions. J. Math. Phys. **32**, 269—275 (1954). — [4] MARX, I.: On the structure of recurrence relations. Michigan math. J. **2**, 45—50 (1954). — [5] WHITTAKER, E. T.: On the recurrence formulae for Mathieu functions. J. London Math. Soc. **4**, 88—96 (1929).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 27. November 1956)

Schäfke, F. W.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 252—266 (1957)

Bemerkungen über Variationsrechnung, implizite Funktionen und Lagrangesche Multiplikatoren

Von
Friedrich Wilhelm Schäfke

1. Meine erste Bemerkung knüpft an die Darstellung der Grundlagen der Variationsrechnung in dem bekannten Werk von Carathéodory[1]) an. C. gelingt der Aufbau der Theorie der einfachsten Grundintegrale

$$\int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\big)\, dt$$

für mehrere gesuchte Funktionen bei festen Enden weitgehend allein unter den in gewisser Beziehung natürlichen Voraussetzungen

(V_1) *$L, L_{x_i}, L_{x_i'}, L_{x_i x_k}, L_{x_i x_k'}, L_{x_i' x_k'}$ seien stetig in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der Variablen $t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$.*

Er sieht sich jedoch zu schärferen Voraussetzungen genötigt und nimmt hier L nach allen $2n+1$ Variablen zweimal stetig differenzierbar an, sowie er zur Einführung einer Hamilton-Funktion, den kanonischen Gleichungen und zur Hamilton-Jacobischen Theorie kommt.

Überlegt man sich den Grund, so erkennt man, daß er allein in dem Satz über implizite Funktionen bzw. Umkehrung eines Funktionensystems liegt. Er wird angewandt, um statt der x_i' die

$$y_i = L_{x'}(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \tag{1}$$

einzuführen, wozu man eben die Umkehrung

$$x_i' = \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \tag{2}$$

braucht. C. wendet hier den klassischen Satz an: Sind die $L_{x_i'}$ nach allen Variablen stetig differenzierbar und ist die Determinante der $L_{x_i' x_k'}$ nicht 0, so ist „im Kleinen" eindeutige Umkehrung durch Funktionen φ_i möglich, die ebenfalls nach allen Variablen stetig differenzierbar sind. Es kann dann

$$H(t, x_i, y_i) = -L(t, x_i, \varphi_i) + \sum_j y_j \varphi_j$$

gebildet werden und erweist sich als zweimal stetig differenzierbar bezüglich aller Variablen.

[1]) Carathéodory, C.: Variationsrechnung, insbes. S. 190ff. Leipzig u. Berlin 1935.

Hier erhebt sich nun die Frage, ob es nicht gelingt, die Theorie konsequent und einheitlich unter den genannten „natürlichen" Voraussetzungen weiterzuführen, um so auch an den erwähnten Stellen etwa die Theorie der akzessorischen Variationsprobleme — wie es C. weitgehend anstrebt — einzubeziehen, ohne Modifikationen nötig zu haben. Wie man sieht, kommt dies auf die Frage nach einem entsprechend in Voraussetzung und Behauptung abgeschwächten Umkehrsatz für Funktionensysteme hinaus.

Daß dies möglich ist, legt schon die Betrachtung des einfachsten Falles, nämlich der Auflösung von

$$f(t, x) = 0$$

nahe. Hier ist die Existenz einer eindeutigen stetigen auflösenden Funktion $x(t)$ um (t_0, x_0) schon gesichert, wenn nur f und f_x in der Umgebung stetig sind und

$$f(t_0, x_0) = 0, \qquad f_x(t_0, x_0) \neq 0$$

gilt. Das lehrt die übliche Beweismethode (Monotonie von f bezüglich x).

Der angestrebte Satz soll im folgenden sogleich in einer Form gegeben werden, die in zwei Richtungen allgemeiner ist: einmal werden Abbildungen zwischen Banach-Räumen betrachtet, zum anderen werden etwa die Sätze über die Einbettbarkeit von Extremalenbögen in Felder mit umfaßt[2]).

Zur Formulierung wird die von v. Stoltz herrührende und von Fréchet in die Funktionalanalysis übertragene Definition der Differentiation verwandt:

$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ seien reelle lineare normierte Räume, $\mathfrak{M}$ eine offene Menge in $\mathfrak{L}_1$, F eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}_2$. Es sei Λ_1 die Gesamtheit der linearen stetigen Abbildungen von $\mathfrak{L}_1$ in $\mathfrak{L}_2$, die in gewohnter Weise wieder als linearer normierter Raum aufgefaßt werde. — In $x_0 \in \mathfrak{M}$ heißt nun F differenzierbar, wenn ein $F'(x_0) \in \Lambda_1$ existiert (dann eindeutig), derart daß

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)\, h + o(\|h\|) \qquad (h \to 0)$$

gilt. — Ist F an jeder Stelle von $\mathfrak{M}$ differenzierbar, so ist F' eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in Λ_1 und man kann gegebenenfalls die zweite Abbildung betrachten. Es übertragen sich in sehr naheliegender Weise Kettenregel, Mittelwertsatz und Taylorscher Satz[3]).

Der Mittelwertsatz erscheint in der Form: Ist F eine differenzierbare Abbildung der offenen konvexen Menge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{L}_1$ in $\mathfrak{L}_2$, f^* eine lineare stetige Abbildung von $\mathfrak{L}_2$ in P, den Banach-Raum der reellen Zahlen (f^* also Element des dualen Raumes $\mathfrak{L}_2^*$), dann gilt für $x_1 \neq x_2$ aus $\mathfrak{M}$

$$f^*\big(F(x_2) - F(x_1)\big) = f^* F'(x_{12})\,(x_2 - x_1)$$

mit einem

$$x_{12} = x_1 + \Theta(x_2 - x_1), \qquad 0 < \Theta < 1.$$

---

[2]) Vgl. z. B. C. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 160ff. Leipzig u. Berlin 1909.

[3]) Vgl. z. B. Ljusternik-Sobolev: Elemente der Funktionalanalysis (deutsche Übersetzung), insbes. Kap. VI. Berlin 1955.

Zum Beweise wird die reelle Funktion von τ $(0 \leq \tau \leq 1)$

$$f^* F(x_1 + \tau(x_2 - x_1))$$

betrachtet und die Kettenregel verwandt. Entsprechend wird für den Taylorschen Satz verfahren.

Der angekündigte umfassende Umkehrsatz ist der

Satz 1. *$\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ seien reelle Banach-Räume, die Variablen in ihnen mit t, x, y bezeichnet. Im kartesischen Produkt $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_1$ [4]) sei $\mathfrak{M}$ eine offene Menge. Sie werde durch die Abbildung F in $\mathfrak{B}_2$ abgebildet. $\mathfrak{C}$ sei eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{M}$. F sei in $\mathfrak{M}$ nach x partiell differenzierbar. F und die partielle Ableitung F_x seien in den Punkten von $\mathfrak{C}$ (also nicht nur „auf" $\mathfrak{C}$) stetig. Für jedes $(t_0, x_0) \in \mathfrak{C}$ möge $F_x(t_0, x_0)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung [5]) von $\mathfrak{B}_1$ auf $\mathfrak{B}_2$ vermitteln. Schließlich gelte für $(t_0, x_1) \in \mathfrak{C}$, $(t_0, x_2) \in \mathfrak{C}$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $F(t_0, x_1) \neq F(t_0, x_2)$.*

Dann (1) *gibt es ein $r > 0$, derart daß für jedes Paar $(t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)$ verschiedener Elemente von $\mathfrak{M}$ mit Abständen von $\mathfrak{C}$*

$$\delta\big((t_i, x_i), \mathfrak{C}\big) < r \qquad (i = 1, 2)$$

auch gilt

$$\big(t_1, F(t_1, x_1)\big) \neq \big(t_2, F(t_2, x_2)\big).$$

(2) *$\mathfrak{C}$ wird umkehrbar eindeutig abgebildet auf die kompakte Menge*

$$\tilde{\mathfrak{C}} = \big\{(t, y) \mid y = F(t, x),\ (t, x) \in \mathfrak{C}\big\}$$

aus $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_2$. (3) *Es gibt ein $\varrho > 0$, derart daß für jedes (t, y) mit*

$$(*) \qquad \delta\big((t, y), \tilde{\mathfrak{C}}\big) < \varrho$$

(eindeutig) ein x mit

$$\delta\big((t, x), \mathfrak{C}\big) < r, \qquad y = F(t, x)$$

existiert. (4) *Setzt man dies*

$$x = \Phi(t, y),$$

so ist Φ im Definitionsbereich (*) *nach y partiell differenzierbar, und zwar*

$$\Phi_y(t, y) = F_x(t, x)^{-1}.$$

(5) ***Φ und Φ_y sind in den Punkten von $\tilde{\mathfrak{C}}$ stetig.***

Der Beweis knüpft an die von HILDEBRANDT und GRAVES zum Beweise ihres Satzes über implizite Funktionen verwandten Methoden [6]) an und soll in Abschnitt 2 gegeben werden.

---

[4]) Wir wählen $\|(t, x)\| = \max(\|t\|, \|x\|)$.

[5]) Dann ist nach einem bekannten Satz von S. BANACH auch $F_x(t_0, x_0)^{-1}$ (linear und) stetig.

[6]) HILDEBRANDT, T. H., and I. M. GRAVES: Implizit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927). Vgl. auch die Darstellung (ohne Zitat) in LUSTERNIK-SOBOLEV, l. c. Fußnote 3, S. 222ff. Die dort ge-

Hier sollen nur noch die Folgerungen des Satzes für die Begründung der Variationsrechnung, von der wir oben ausgingen, kurz genannt werden:

Unter den Voraussetzungen (V_1) folgt bei Nichtverschwinden der Determinante der $L_{x_i' x_k'}$ „im Kleinen" die Umkehrbarkeit von (1) durch Funktionen (2), die zusammen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach den x_i, y_i in allen $2n+1$ Variablen t, x_j, y_j stetig sind. [Man wird dabei zur Anwendung von Satz 1 in gewohnter Weise zu (1) die n Gleichungen $z_i = x_i$ hinzunehmen.]

Bildet man dann (3), so folgt natürlich

$$H_{x_j} = -L_{x_j}(t, x_i, \varphi_i), \qquad H_{y_j} = \varphi_j,$$

und mit (V_1) und den Eigenschaften der φ_j wiederum, daß

$$H, H_{x_i}, H_{y_i}, H_{x_i x_k}, H_{x_i y_k}, H_{y_i y_k}$$

bezüglich aller $2n-1$ Variablen t, x_j, y_j stetig sind. Das genügt völlig zum Aufbau der Hamilton-Jacobischen Theorie[7]).

Eine zweite Bemerkung schließt sich unmittelbar an.

Wie man sieht, ist mit Hilfe derartiger Sätze der Nachweis der Existenz einer Hamilton-Funktion stets nur „im Kleinen" möglich. Das ist recht unbefriedigend, da man ja vor allem Probleme „im Großen" im Auge hat. Die mir bekannten Darstellungen gehen entweder ganz darüber hinweg, oder sie postulieren die Existenz *einer* Hamilton-Funktion. Das entspricht wohl der klassischen Variations*rechnung*, die vor allem an Beispielen orientiert ist und bei der die Theorie oft nur allgemeine Formulierung des Vorgehens an Beispielen ist. Im Rahmen einer modernen strengen Variationstheorie jedoch, wie man sie etwa seit CARATHEODORY anstrebt, stellt die genannte Tatsache wohl eine gewisse Lücke dar.

Es zeigt sich nun, daß eine sehr befriedigende und überaus einfache Lösung dieser Aufgabe auf Grund eines entsprechenden Umkehrsatzes im Großen möglich ist: Hat man ein positiv-reguläres Variationsproblem, d.h. fordert man zusätzlich zu (V_1) noch

(V_2) *$\mathfrak{F}$ ist bezüglich der Variablen x_i' konvex. An jeder Stelle von $\mathfrak{F}$ ist die quadratische Form*

$$\sum_{i,k} L_{x_i' x_k'}(t, x_j, x_j')\, \xi_i \xi_k$$

positiv definit.

dann gilt:

Durch die Gln. (1) wird das Gebiet $\mathfrak{E}$ eineindeutig auf ein Gebiet $\mathfrak{T}$ des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes der Variablen t, x_i, y_i abgebildet.

gebenen Sätze beziehen sich auf Punktausartung von $\mathfrak{C}$, liefern aber auch dann nicht den schärferen Inhalt unseres Satzes, wohl aber mit einer geläufigen Umformung umgekehrt. Beim Satze von LUSTERNIK-SOBOLEV, S. 222 muß offenbar die Voraussetzung der Stetigkeit von $\varphi(x, y)$ ergänzt werden. Ein Teilresultat in unserer Richtung in bezug auf Funktionensysteme wird bei J. HADAMARD, Lecons du calcul des variations, I, Paris 1910, S. 497, Anmerkung 2, erwähnt.

[7]) Vgl. dazu auch die Bemerkung 2 von C. CARATHEODORY, l. c. S. 51.

Dann hat man also „im Großen" *eine* Hamilton-Funktion.

Zugrunde liegt diesem Resultat ein einfacher Satz über Umkehrbarkeit im Großen, der als Verallgemeinerung der Tatsache erscheint, daß eine in einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung eine entsprechende Umkehrfunktion besitzt. Es muß nur statt „Intervall" „konvexes Gebiet" und statt der Positivität eine Positiv-Definitheit gefordert werden. Natürlich läßt sich der Satz am bequemsten sofort für Banach-Räume formulieren:

Satz 2. *Sei* $\mathfrak{B}$ *ein reeller Banach-Raum,* $\mathfrak{B}^*$ *der duale Raum,* F *eine differenzierbare Abbildung eines konvexen Gebietes* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{B}$ *in* $\mathfrak{B}^*$. *Diese habe die Eigenschaft, daß für alle* x *aus* $\mathfrak{G}$ *und alle* $h \neq 0$ *aus* $\mathfrak{B}$ *stets*

$$\big(F'(x)\,h\big)\,h \neq 0$$

gelte.

Dann gilt für $x_1 \neq x_2$ *aus* $\mathfrak{G}$ *immer* $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Man beachte dazu, daß $F'(x)$ eine lineare stetige Abbildung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}^*$, daher $F'(x)h$ aus $\mathfrak{B}^*$ und somit $\big(F'(x)h\big)h$ eine reelle Zahl ist.

Der Beweis beruht auf dem oben genannten Mittelwertsatz:

$$\big(F(x_2) - F(x_1)\big)\,(x_2 - x_1) = \big(F'(x_{12})\,(x_2 - x_1)\big)\,(x_2 - x_1) \neq 0.$$

Es ist wohl unmittelbar ersichtlich, wie dieser Satz zu dem vorher notierten Ergebnis für die Variationstheorie führt.

Eine dritte und letzte Bemerkung betrifft die Frage nach der Möglichkeit, die Variationstheorie weitgehend in eine allgemeine Analysis einzubetten, die zugleich Extremalaufgaben für Zahlenfunktionen umfaßt. Lange bekannt — nämlich einer der Ausgangspunkte für den Begriff des Fréchetschen Differentials — ist natürlich folgendes:

Bei den o.B.d.A. wählbaren Enden

$$x_i(t_0) = x_i(t_1) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kann das Grundintegral

$$\int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x_j(t), x_j'(t)\big)\,dt = F(x)$$

als Abbildung einer offenen Menge des Banach-Raumes der an den Enden verschwindenden in $[t_0, t_1]$ stetig differenzierbaren reellen Vektorfunktionen mit

$$\|x\| = \max_{t,j,k}\big(|x_j(t)|, |x_k'(t)|\big)$$

in den Banach-Raum P der reellen Zahlen aufgefaßt werden. Unter den Voraussetzungen (V_1)[8]) ist dann das „erste Differential"

$$F'(x)\,h = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \big(L_{x_i}(t, x_j(t), x_j'(t))\,h_i(t) + L_{x'}(t, x_j(t), x_j'(t))\,h_i'(t)\big)\,dt$$

[8]) Für die erste Variation benötigt man natürlich die zweiten Ableitungen nicht.

und nichts anderes als die „erste Variation", ebenso das „zweite Differential" (vgl. den entsprechenden Taylorschen Satz)

$$(F''(x)\,h)\,h = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k} (L_{x_i x_k} h_i h_k + 2 L_{x_i x_i'} h_i h_k' + L_{x_i' x_k'} h_i' h_k')\,dt$$

und nichts anderes als die „zweite Variation".

So folgt mancherlei, was oft für die Variationsrechnung etwas umständlich begründet wird, einfach aus den sehr naheliegenden Sätzen:

a) Hat eine differenzierbare Abbildung F einer offenen Menge $\mathfrak{M}$ eines reellen linearen normierten Raumes in den Raum P im Punkte x_0 ein relatives Minimum, so ist $F'(x_0) = 0$, das Nullfunktional.

b) Ist dabei F zweimal differenzierbar, so hat man zusätzlich für alle h des Raumes $(F''(x_0)\,h)\,h \geqq 0$.

Mit Hilfe des Taylorschen Satzes kann man natürlich auch zu gewissen hinreichenden Bedingungen kommen. Sie erweisen sich jedoch in dieser Form als für die Variationstheorie kaum besonders handlich.

Interessanter und anscheinend im hier gegebenen Umfange noch nicht gelöst ist nun die Frage nach gemeinsamer Behandlung der Extremalprobleme mit Nebenbedingungen, also nach einem umfassenden Satz über Lagrangesche Multiplikatoren. Er müßte sowohl die Zahlenmultiplikatoren bei den isoperimetrischen Problemen (was allein kaum Schwierigkeiten macht) als auch etwa die Multiplikatorfunktionen bei holonomen Bindungen liefern[9]).

Dies erfüllt nun der folgende

Satz 3. *$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_3$ seien reelle Banach-Räume. Die offene Menge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ werde durch die stetig differenzierbaren Abbildungen f bzw. G in P (reelle Zahlen) bzw. $\mathfrak{B}_3$ abgebildet. Für $a \in \mathfrak{M}$ sei $G(a) = 0$. $f(x)$ habe in a ein relatives Minimum unter der Nebenbedingung $G(x) = 0$. $\mathfrak{B}$ lasse eine Zerlegung als nichttriviale direkte Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ zweier Unterräume $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ zu. Durch $G'(a)$ werde $\mathfrak{B}_1$ eineindeutig auf $\mathfrak{B}_3$ abgebildet. (Die dann stetige lineare Umkehrung, die $\mathfrak{B}_3$ auf $\mathfrak{B}_1$ abbildet, sei mit $G'(a)^{-1}$ bezeichnet.)*

Dann existiert ein λ aus dem dualen Raum $\mathfrak{B}_3^*$, derart daß

$$f'(a) = \lambda G'(a).$$

Es ist[10])

$$\lambda = f'(a)\,G'(a)^{-1}.$$

Sind zusätzlich f und G zweimal stetig differenzierbar, so hat man noch: Für jedes h aus $\mathfrak{B}$ mit $G'(a)\,h = 0$ gilt

$$[(f''(a) - \lambda G''(a))\,h]\,h \geqq 0.$$

---

[9]) Unser Satz dürfte eine gewisse Ergänzung geben zu den Bestrebungen bei der Behandlung der Lagrangeschen Multiplikatoren, wie sie insbesondere H. Hahn, Monatsh. f. Math. **14**, 325—342 (1903); **17**, 295—304 (1906), verfolgt hat.

[10]) Das ist — vgl. die Definition von $G'(a)^{-1}$ — keine triviale Umformung.

Zur Erläuterung sollte gesagt werden: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ bedeutet, daß jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig eine Darstellung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathfrak{B}_1$, $x_2 \in \mathfrak{B}_2$ besitzt, wobei die x_i stetig (und linear) von x abhängen. Daraus folgt die Isomorphie $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ im Sinne einer Isomorphie der linearen Räume und einer Äquivalenz der Normen (jede Norm relativ zur anderen beschränkt).

Wir führen den Beweis von Satz 3 unten in Abschnitt 3. Im folgenden deuten wir kurz mögliche Anwendungen an. Naheliegend ist natürlich die Spezialisierung auf Zahlfunktionen, auf die wir daher verzichten wollen.

Betrachten wir zuerst die Anwendung auf isoperimetrische Probleme. Neben L seien die Grundfunktionen $L_1, L_2, \ldots, L_k$ gegeben. Für alle diese sei (V_1) erfüllt. Wir betrachten als feste Enden o.B.d.A.

$$x_i(t_0) = x_i(t_1) = 0.$$

$\mathfrak{B}$ sei nun der oben genannte Banach-Raum der stetig differenzierbaren Vektorfunktionen mit dieser Eigenschaft. Wir setzen

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x_i(t), x_i'(t)\big)\, dt,$$

$$g_p(x) = \int_{t_0}^{t_1} L_p\big(t, x_i(t), x_i'(t)\big)\, dt,$$

$$G(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_k(x)\big)$$

und wählen $\mathfrak{B}_3 = \mathsf{P}^{\wedge k}$, d.h. als k-dimensionalen Vektorraum. In einer geeigneten offenen Menge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ (von $\mathfrak{Z}$ abhängig) sind dann f und G zweimal stetig differenzierbar.

Es möge nun für $a \in \mathfrak{M}$ $f(x)$ ein relatives Minimum unter der Nebenbedingung $G(x) = 0$ besitzen. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

1) $G'(a)h$ $(h \in \mathfrak{B})$ erfüllt nicht den ganzen Raum $\mathfrak{B}_3$. Dann ist die Wertemenge ein echter Unterraum $\mathfrak{U}$. Im dualen Raume $\mathfrak{B}_3^* \cong \mathsf{P}^{\wedge k}$ gibt es ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$, derart daß für alle $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ aus $\mathfrak{U}$ gilt $\lambda u = \sum_1^k \lambda_i u_i = 0$. Dann gilt mit

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq 0$$

die isoperimetrische Bedingung

$$\lambda_0 f'(a) + \lambda_1 g_1'(a) + \cdots + \lambda_k g_k'(a) = 0$$

(Nullfunktional).

2) $G'(a)h$ $(h \in \mathfrak{B})$ erfüllt ganz $\mathfrak{B}_3$. Dann wähle man $h_1, h_2, \ldots, h_k$ aus $\mathfrak{B}$ mit $g_i'(a)h_j = \delta_{ij}$. Die $h_1, \ldots, h_k$ sind linear unabhängig. Man wähle $\mathfrak{B}_1$ als den von diesen aufgespannten Unterraum und findet in bekannter Weise eine Zerlegung $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$. Damit sind dann die Voraussetzungen von Satz 3 gegeben. Man hat somit ein

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$$

aus $\mathfrak{B}_3^*$ mit $f'(a) = \lambda G'(a)$, d.h.

$$f'(a) = \lambda_1 g_1'(a) + \cdots + \lambda_k g_k'(a).$$

Das ist wieder die isoperimetrische Bedingung. Man kann sie auf die ersten Variationen umschreiben und hat sie dann in Form der Eulerschen Differentialgleichungen. Entsprechend kann man nun sofort die Bedingung zweiter Ordnung von Satz 3 für die zweiten Variationen aufschreiben.

Diskutieren wir weiter die Anwendung von Satz 3 auf Variationsprobleme mit holonomen Bindungen. L, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, f mögen dieselbe Bedeutung haben und dieselben Voraussetzungen erfüllen wie eben. Es sei $n \geqq 2$. Zusätzlich seien die $L_{x_i' t}$ in $\mathfrak{Z}$ vorhanden und stetig. Dann wählen wir $\mathfrak{B}_3$ als den Banach-Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $y(t)$ in $[t_0, t_1]$ mit $y_0(t) = y(t_1) = 0$ und

$$\|y\| = \max(|y(t)|, |y'(t)|).$$

In der Projektion von $\mathfrak{Z}$ auf den $(n+1)$-dimensionalen Raum der Variablen t, $x_1, \ldots, x_n$ sei die Funktion $M(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit den Ableitungen

$$M_t, M_{x_i}, M_{x_i t}, M_{x_i x_k}, M_{x_i x_k t}, M_{x_i x_k x_j}$$

stetig und

$$M(t_0, 0, \ldots, 0) = M(t_1, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Durch

$$y = G(x) = M\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

wird dann eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{B}_3$ vermittelt.

In a aus $\mathfrak{M}$ möge nun f ein relatives Minimum bei der Nebenbedingung $G(x) = 0$ haben[11]). Es gebe einen Index p aus $1, 2, \ldots, k$ derart, daß

$$M_{x_p}\big(t, a_1(t), \ldots, a_n(t)\big) \neq 0 \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

sei. $a(t)$ sei zweimal stetig differenzierbar.

Dann kann man $\mathfrak{B}_1$ als den Unterraum von $\mathfrak{B}$ wählen, in dem alle $x_i(t) = 0$ für $i \neq p$ sind und $\mathfrak{B}_2$ entsprechend als den mit $x_p(t) = 0$. Für $h \in \mathfrak{B}_1$ wird dann

$$G'(a)\,h = M_{x_p}\big(t, a_1(t), \ldots, a_n(t)\big)\,h_p(t).$$

Damit hat man eine eineindeutige Abbildung zwischen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$, und man kann Satz 3 anwenden.

Dazu ist es nun wesentlich, die Struktur des Funktionals λ zu kennen. Sie wird einfach aus Satz 3 entnommen. Man beachtet, daß Anwendung von $G'(a)^{-1}$ auf $y \in \mathfrak{B}_3$ eine Multiplikation mit einer stetig differenzierbaren Funktion bedeutet, ferner, daß Anwendung von $f'(a)$ auf $x \in \mathfrak{B}_1$ die Multiplikation von x_p mit einer stetigen Funktion, nämlich mit

$$L_{x_p} - (L_{x_p'})'\big|_{x=a}$$

[11]) Es ist also speziell $G(a) = 0$, d.h. $M(t, a_1(t), \ldots, a_n(t)) \equiv 0$.

[wozu man die Stetigkeit von $L_{x_p' t}$ und $a''(t)$ beachtet], und nachfolgende Integration über $[t_0, t_1]$ bedeutet. Damit ist das Funktional λ nichts anderes als die Multiplikation mit einer stetigen Funktion $\lambda(t)$ und nachfolgende Integration.

Man kommt so in der gewohnten Weise auf die Eulerschen Differentialgleichungen

$$(N_{x_i'})' = N_{x_i}$$

mit

$$N = L(t, x_1, \ldots, x_n') - \lambda(t)\, M(t, x_1, \ldots, x_n)$$

für $x = a$. Weiter kann man nun sofort die Bedingung zweiter Ordnung hinschreiben.

Diese Andeutungen für die Anwendungen von Satz 3 mögen genügen. Man sieht schnell, wie man entsprechend für mehrere holonome Bindungen und schließlich auch für nicht-holonome Bindungen vorgehen kann.

2. Wir führen im folgenden den Beweis von Satz 1. Wir schicken, um später den Gedankengang weniger unterbrechen zu müssen, zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. A, B seien stetige lineare Abbildungen eines Banach-Raumes $\mathfrak{B}_1$ in den Banach-Raum $\mathfrak{B}_2$. Es existiere A^{-1} [12]). Man habe

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{a}, \qquad \|B - A\| \leq \alpha < a.$$

Dann existiert auch B^{-1} und man hat

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{a - \alpha}, \qquad \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{a(a - \alpha)}.$$

Beweis. Man schreibt

$$B = \left(E + (B - A)\, A^{-1}\right) A,$$

wo E der Einheitsoperator in $\mathfrak{B}_2$ und $(B - A)\, A^{-1}$ nach Voraussetzung stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{B}_2$ in sich mit

$$\|(B - A)\, A^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{a} < 1$$

ist. Dann existiert aber bekanntlich

$$\left(E + (B - A)\, A^{-1}\right)^{-1} = E - [(B - A)\, A^{-1}] + [(B - A)\, A^{-1}]^2 - + \cdots$$

mit

$$\|(E + (B - A)\, A^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{a}},$$

$$\|(E + (B - A)\, A^{-1})^{-1} - E\| \leq \frac{\frac{\alpha}{a}}{1 - \frac{\alpha}{a}}.$$

[12]) Das heißt A bilde $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ eineindeutig aufeinander ab, so daß nach S. BANACH auch A^{-1} linear und stetig ist.

Daraus folgen nun sofort die Existenz von

$$B^{-1} = A^{-1}\left(E + (B - A)\,A^{-1}\right)^{-1}$$

und die behaupteten Abschätzungen.

Hilfssatz 2. Die differenzierbare Abbildung F bilde die Kugel $\|x-a\|<r_1$ des Banach-Raumes $\mathfrak{B}_1$ in den Banach-Raum $\mathfrak{B}_2$ ab. Es sei $F(a)=b$. A sei eine stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{B}_2$. Es existiere A^{-1} [12]) mit $\|A^{-1}\| \leqq \frac{1}{m}$. Für alle x mit $\|x-a\|<r_1$ gelte

$$\|F'(x) - A\| \leqq \frac{m}{2}.$$

Dann nimmt $F(x)$ in $\|x-a\|<r_1$ keinen Wert zweimal und jeden Wert y mit $\|y-b\|<\frac{m}{2}r_1$ einmal an. Man hat für x_i aus $\|x-a\|<r_1$

$$\frac{m}{2}\|x_2 - x_1\| \leqq \|F(x_2) - F(x_1)\|.$$

Beweis. Wir nehmen $a=0$, $b=0$ an, was wegen des möglichen Übergangs zu $F(x+a)-b$ an Stelle von $F(x)$ keine Einschränkung darstellt. Wir setzen

(∘) $$F(x) - A\,x = \varphi(x).$$

Dann gilt für x_1, x_2 mit $\|x_i\|<r_1$ und ein $f^* \in \mathfrak{B}_2^*$ nach dem Mittelwertsatz mit einem $x_{12} = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)$, $0<\vartheta<1$,

$$f^*\left(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\right) = f^*\left(F'(x_{12}) - A\right)(x_2 - x_1).$$

Wir wählen speziell (Hahn-Banach)

$$\|f^*\| = 1, \qquad f^*(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) = \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|$$

und erhalten

(*) $$\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leqq \frac{m}{2}\|x_2 - x_1\|.$$

Daraus folgt mit (∘) und $\|A^{-1}\| \leqq \frac{1}{m}$, also $\|A(x_2-x_1)\| \geqq m\|x_2-x_1\|$, sofort die letzte und so erst recht die erste Behauptung des Satzes. Wir bilden weiter

$$\psi(x) = -A^{-1}\varphi(x),$$

für das nun mit $\|x_i\|<r_1$ gilt

(**) $$\|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| \leqq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|.$$

Jetzt ist offenbar $y=F(x)$ äquivalent mit

$$x = A^{-1}y + \psi(x).$$

Daraus wird die zweite Behauptung erhalten, indem man das Iterationsverfahren anwendet:

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = A^{-1}y + \psi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man hat für $\|y\| < \frac{m}{2} r_1$

$$\|x_1 - x_0\| < \frac{1}{2} r_1$$

und

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Also hat man $\|x_n\| < r_1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die x_n konvergieren gegen ein x mit $\|x\| < r_1$ und es gilt $x = A^{-1}y + \psi(x)$, d.h. $y = F(x)$.

Beweis von Satz 1. *Behauptung* (1). Wir zeigen hier sogleich etwas mehr. — In den Punkten von $\mathfrak{C}$ ist $F_x(t, x)$, stetig, und es existiert auf $\mathfrak{C}$ $F_x(t, x)^{-1}$. Nach Hilfssatz 1 ist dann auch $F_x(t, x)^{-1}$ auf $\mathfrak{C}$ stetig, ebenso damit $\|F_x(t, x)^{-1}\|$. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{C}$ existiert also ein $m > 0$ mit

$$\|F_x(t, x)^{-1}\| \leq \frac{1}{m} \qquad ((t, x) \in \mathfrak{C}).$$

Aus der Stetigkeit von $F_x(t, x)$ in den Punkten von $\mathfrak{C}$ und der Kompaktheit von $\mathfrak{C}$ ergibt sich weiter die Existenz eines $r_1 > 0$, derart daß für jedes Paar $(t, x) \in \mathfrak{M}$, $(t_0, x_0) \in \mathfrak{C}$ mit $\delta((t, x), (t_0, x_0)) < r_1$ gilt

$$\|F_x(t, x) - F_x(t_0, x_0)\| \leq \frac{m}{2}.$$

Denn sonst hätte man Folgen $(t_n, x_n) \in \mathfrak{M}$, $(t_{0n}, x_{0n}) \in \mathfrak{C}$ mit

$$\delta((t_n, x_n), (t_{0n}, x_{0n})) \to 0, \qquad \|F_x(t_n, x_n) - F_x(t_{0n}, x_{0n})\| > \frac{m}{2}.$$

Man wählt nun eine Teilfolge der (t_{0n}, x_{0n}) aus, die gegen ein $(t_{00}, x_{00}) \in \mathfrak{C}$ konvergiert[13]). Dann folgt ein Widerspruch gegen die Stetigkeit von $F_x(t, x)$ an dieser Stelle.

Aus diesen beiden Tatsachen folgt nun mit Hilfssatz 1:

In den Punkten $(t, x) \in \mathfrak{M}$ mit $\delta((t, x), \mathfrak{C}) < r_1$ existiert $F_x(t, x)^{-1}$. Man hat $\|F_x(t, x)^{-1}\| \leq \frac{2}{m}$. $F_x(t, x)^{-1}$ ist in den Punkten von $\mathfrak{C}$ stetig.

Nun zur eigentlichen Behauptung (1). Wäre sie unrichtig, so hätte man Folgen $(t_n, x_{1n}) \in \mathfrak{M}$, $(t_n, x_{2n}) \in \mathfrak{M}$ mit $x_{1n} \neq x_{2n}$, $\delta((t_n, x_{in}), \mathfrak{C}) \to 0$, $F(t_n, x_{1n}) = F(t_n, x_{2n})$. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{C}$ kann man annehmen

$$(t_n, x_{1n}) \to (t_0, x_{10}) \in \mathfrak{C},$$

$$(t_n, x_{2n}) \to (t_0, x_{20}) \in \mathfrak{C}.$$

[13]) Entsprechendes können wir als Definition der Kompaktheit wählen.

Dann folgt mit der Stetigkeit von F in den Punkten von $\mathfrak{C}$

$$F(t_0, x_{10}) = F(t_0, x_{20}),$$

also nach Voraussetzung $x_{10} = x_{20} = x_0$. Ist nun aber

$$\delta\big((t_n, x_{1n}), (t_0, x_0)\big) < r_1,$$
$$\delta\big((t_n, x_{2n}), (t_0, x_0)\big) < r_1,$$

so kann man $F(x) - F(t_n, x)$, $A = F_x(t_0, x_0)$ wählen und erhält mit der ersten Behauptung von Hilfssatz 2 einen Widerspruch. — Wir nehmen im folgenden $r \leqq r_1$.

Behauptung (2). Die Eineindeutigkeit ist nach Voraussetzung gegeben. $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist ferner kompakt wegen der Stetigkeit von F auf $\mathfrak{C}$. Denn: seien $(t_n, y_n) \in \tilde{\mathfrak{C}}$, $y_n = F(t_n, x_n)$, $(t_n, x_n) \in \mathfrak{C}$. Dann gibt es eine Teilfolge (t_{n_ν}, x_{n_ν}), die gegen ein $(t_0, x_0) \in \mathfrak{C}$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von F auf $\mathfrak{C}$ folgt dann $y_{n_\nu} \to y_0 = F(t_0, x_0)$, $(t_{n_\nu}, y_{n_\nu}) \to (t_0, y_0) \in \tilde{\mathfrak{C}}$.

Behauptung (3). Wäre sie nicht erfüllt, so gäbe es eine Folge (t_n, y_n) mit $\delta\big((t_n, y_n), \tilde{\mathfrak{C}}\big) \to 0$, derart daß kein x_n mit $y_n = F(t_n, x_n)$ und $\delta\big((t_n, x_n), \mathfrak{C}\big) < r$ existiert. Wir können nun wegen der Kompaktheit von $\tilde{\mathfrak{C}}$ annehmen, daß $(t_n, y_n) \to (t_0, y_0) \in \tilde{\mathfrak{C}}$ mit $y_0 = F(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathfrak{C}$. Das führt zu einem Widerspruch.

Sei für $\|t_n - t_0\| < r$ gesetzt

$$F(t_n, x_0) = \tilde{y}_n.$$

Dann überdeckt nach Hilfssatz 2 die Menge der $y = F(t_n, x)$ mit $\|x - x_0\| < r$ die Kugel $\|y - \tilde{y}_n\| < \frac{m}{2} r$. [Man wählt dabei in Hilfssatz 2 $a = x_0$, $F(x) = F(t_n, x)$, $A = F_x(t_0, x_0)$, beachtet die hier besonders bequeme Wahl der Norm in $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_1$ [4]) und die Konstruktion von $r \leqq r_1$.] Nun gilt nach Voraussetzung der Stetigkeit von F in den Punkten von $\mathfrak{C}$

$$\tilde{y}_n \to y_0.$$

Dann wird aber für $\|\tilde{y}_n - y_0\| < \delta$ von den

$$y = F(t_n, x), \quad \|x - x_0\| < r$$

die Kugel

$$\|y - y_0\| < \frac{m}{2} r - \delta$$

überdeckt, was den Widerspruch zur Konstruktion der (t_n, y_n) liefert.

Behauptung (4). Sei (t, y_1) im Definitionsbereich (*), $x_1 = \Phi(t, y_1)$. Dann gibt es nach Konstruktion von ϱ, $r \leqq r_1$ ein $(t_0, x_0) \in \mathfrak{C}$ mit $\delta\big((t, x_1), (t_0, x_0)\big) < r$. Es gibt weiter ein $r_2 > 0$, derart daß für x mit $\|x - x_1\| < r_2$ noch immer $\delta\big((t, x), (t_0, x_0)\big) < r$, also $\|F_x(t, x) - F_x(t_0, x_0)\| \leqq \frac{m}{2}$ gilt. Nach Hilfssatz 2 folgt dann, daß die $y = F(t, x)$ mit $\|x - x_1\| < r_2$ die Kugel $\|y - y_1\| < \frac{m}{2} r_2$

überdecken. Für y in dieser Kugel und das zugehörige $x = \Phi(t, y)$ hat man ferner

$$\frac{m}{2}\|x - x_1\| \leq \|y - y_1\|.$$

Da nun $F_x(t, x_1)^{-1}$ existiert, folgt mit

$$y - y_1 = F_x(t, x_1)(x - x_1) + o(\|x - x_1\|)$$

die Behauptung:

$$x - x_1 = F_x(t, x_1)^{-1}(y - y_1) + o(\|y - y_1\|).$$

Behauptung (5). Wie der bisherige Beweis zeigt, kann man das r beliebig klein wählen und jeweils ein entsprechendes ϱ finden. Hat man daher $(t_n, y_n) \to (t_0, y_0) \in \widetilde{\mathfrak{E}}$, $y_0 = F(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \mathfrak{E}$, so muß notwendig $\delta((t_n, x_n), \mathfrak{E}) \to 0$ für die $x_n = \Phi(t_n, y_n)$ gelten. Hier kann nun [($\mathfrak{E}$) kompakt] keine Teilfolge $(t_{n_\nu}, x_{n_\nu}) \to (t_0, \hat{x}_0)$ mit $\hat{x}_0 \neq x_0$ existieren, weil das $F(t_0, \hat{x}_0) = F(t_0, x_0) = y_0$ ergäbe. Also gilt $x_n \to x_0$, was für den Nachweis der Stetigkeit von Φ in den Punkten von $\widetilde{\mathfrak{E}}$ zu zeigen war. Der Rest der Behauptung folgt nun mit

$$\Phi_y(t, y) = F_x\big(t, \Phi(t, y)\big)^{-1}\ ^{14}).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

3. Wir führen den Beweis für Satz 3.

Sei $a = a_1 + a_2$, $a_i \in \mathfrak{B}_i$. Dann folgt mit Anwendung von Satz 1: Es gibt ein $r > 0$ und ein $\varrho > 0$ derart, daß zu jedem $x_2 \in \mathfrak{B}_2$ mit $\|x_2 - a_2\| < \varrho$ genau ein $x_1 \in \mathfrak{B}_1$ mit $\|x_1 - a_1\| < r$ und $G(x_1 + x_2) = 0$ existiert. Wird $x_1 = \varphi(x_2)$ gesetzt, so ist $\varphi(x_2)$ stetig differenzierbar und speziell

$$\varphi'(a_2) = -G'(a)^{-1} G'(a).$$

[Man betrachtet die durch $G(x_1 + x_2) = z_1$, $x_2 = z_2$ gegebene Abbildung Γ von $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{B}_2$ um $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$, $(z_1, z_2) = (0, a_2)$. Für sie ist $\Gamma'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = (G'(x)(h_1 + h_2), h_2)$, also $\Gamma'(a_1, a_2)^{-1}(k_1, k_2) = (k_1 - G'(a)^{-1} G'(a) k_2, k_2)$.]

Hieraus folgt wiederum: Es gibt ein $\hat{r} > 0$, derart daß $G(x) = 0$ bei $x = x_1 + x_2$, $x_i \in \mathfrak{B}_i$, $\|x - a\| < \hat{r}$ äquivalent ist zu $x_1 = \varphi(x_2)$. Damit bedeutet nun die Voraussetzung, daß $f(x)$ in a ein relatives Minimum unter der Nebenbedingung $G(x) = 0$ hat, nichts anderes als, daß

$$f(\varphi(x_2) + x_2) \qquad (x_2 \in \mathfrak{B}_2)$$

in $x = a_2$ ein relatives Minimum hat. Dann muß an der Stelle a_2 die Ableitung verschwinden: Es muß für alle $h_2 \in \mathfrak{B}_2$

$$f'(a)\big(\varphi'(a_2) h_2 + h_2\big) = 0$$

---

[14]) Damit erhält man in gewohnter Weise auch Aussagen über höhere Ableitungen von Φ, falls solche für F gegeben sind.

gelten. Das kann nun nach der obigen Formel für $\varphi'(a_2)$ auch

$$f'(a)\,h_2 = \left(f'(a)\,G'(a)^{-1}\right) G'(a)\,h_2$$

geschrieben werden. Für $h_1 \in \mathfrak{B}_1$ ist aber die Relation

$$f'(a)\,h_1 = \left(f'(a)\,G'(a)^{-1}\right) G'(a)\,h_1$$

nach der Definition von $G'(a)^{-1}$ trivial. So hat man nunmehr, wie behauptet, diese Relation für alle $h \in \mathfrak{B}$, also

$$f'(a) = \lambda\, G'(a)$$

mit

$$\lambda = f'(a)\,G'(a)^{-1}.$$

Nun zur Bedingung zweiter Ordnung. Wir beweisen sie indirekt. Nehmen wir also ein $\tilde{h} \in \mathfrak{B}$ mit

$$G'(a)\,\tilde{h} = 0, \qquad \left(\left(f''(a) - \lambda\, G''(a)\right)\tilde{h}\right)\tilde{h} < 0$$

an. Wir zeigen zunächst die Zwischenbehauptung: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß zu jedem τ mit $|\tau| < \varepsilon$ ein

$$x = a + \tau\tilde{h} + o(\tau) \qquad (\tau \to 0)$$

aus $\mathfrak{M}$ mit $G(x) = 0$ existiert.

Denn sei $\tilde{h} = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2$, $\tilde{h}_i \in \mathfrak{B}_i$. Wir wählen dann $\varepsilon\,\|\tilde{h}_2\| \leq \varrho$ (vgl. den Beginn des Beweises). Nach der obigen Überlegung gibt es für τ mit $|\tau| < \varepsilon$ genau ein $h_1(\tau) \in \mathfrak{B}_1$ mit $\|h_1(\tau)\| < r$ derart, daß $G(x) = 0$ für $x = a + h_1(\tau) + \tau\tilde{h}_2$ gilt. Man hat (Definition der Differenzierbarkeit)

$$G'(a)\,h_1(\tau) + \tau\, G'(a)\,\tilde{h}_2 + o\left(\|h_1(\tau) + \tau\tilde{h}_2\|\right) = 0$$

und nach Voraussetzung

$$G'(a)\,\tilde{h}_1 + G'(a)\,\tilde{h}_2 = 0,$$

also

$$G'(a)\left(h_1(\tau) - \tau\tilde{h}_1\right) = o\left(\|h_1(\tau) + \tau\tilde{h}_2\|\right).$$

„Multiplikation" mit $G'(a)^{-1}$ liefert nun

$$h_1(\tau) - \tau h_1 = o\left(\|\tilde{h}_1(\tau) + \tau\tilde{h}_2\|\right).$$

Das heißt aber

$$\|h_1(\tau) - \tau\tilde{h}_1\| \leq o(1)\left\{\|h_1(\tau) - \tau\tilde{h}_1\| + |\tau|\,\|\tilde{h}\|\right\}.$$

Für $o(1) < 1$ folgt

$$\|h_1(\tau) - \tau\tilde{h}_1\| \leq \frac{o(1)}{1 - o(1)}\,|\tau|\,\|\tilde{h}\|,$$

also, wie für die Zwischenbehauptung zu zeigen war,

$$h_1(\tau) - \tau\tilde{h}_1 = o(\tau).$$

Für die konstruierten

$$x = a + \tau \tilde{h} + o(\tau)$$

werden wir nun den Taylorschen Satz an[15]) und beachten $f'(a) - \lambda G'(a) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \leqq f(x) - f(a) &= (f(x) - \lambda G(x)) - (f(a) - \lambda G(a)) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(f''(a) - \lambda G''(a))(x - a)\right](x - a) + o(\|x - a\|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\tau^2\left\{\left((f''(a) - \lambda G''(a))\tilde{h}\right)\tilde{h}\right\} + o(\tau^2). \end{aligned}$$

Das liefert aber für kleine τ einen Widerspruch.

Herrn ERNST HÖLDER verdanke ich wertvolle Bemerkungen, insbesondere die Literaturhinweise auf J. HADAMARD und H. HAHN in den Anmerkungen 6 und 9.

[15]) Dabei wird die Stetigkeit der zweiten Ableitungen benutzt.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 17. November 1956)

Eichler, M.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 267—298 (1957)

Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale

Herrn C. L. Siegel zum 60. Geburtstage gewidmet

Von

M. Eichler

Einleitung

G. Bol [1] entdeckte, daß die $(n-1)$-fache Ableitung einer Modulform des (nicht negativen) Grades $n-2$ eine Modulform $(-n)$-ten Grades ist. H. Petersson griff diesen Gedanken in einer großen Abhandlung [5] auf, allerdings gewissermaßen nur am Rande. Angeregt durch Herrn Petersson, habe ich die umgekehrten Bildungen, nämlich die $(n-1)$-fachen unbestimmten Integrale von Modulformen des Grades $-n$ studiert, vorwiegend unter der Voraussetzung $n \equiv 0 \bmod 2$, und lege die Ergebnisse im folgenden vor.

Man braucht sich dabei keineswegs auf Modulfunktionen zu beschränken. Vielmehr geht man von einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ und einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung auf $\mathfrak{R}$ aus. Der Quotient τ zweier Lösungen von dieser ist eine auf $\mathfrak{R}$ linear polymorphe Funktion, für welche Singularitäten bekannter Art zugelassen werden. Im einzelnen siehe zu den gemachten Voraussetzungen den § 1. Die Funktionen x und die Differentiale $x\,dy^l$ beliebigen Grades werden als automorphe Funktionen $x(\tau)$ und automorphe Formen $x\,dy^l = \varphi(\tau)\,d\tau^l$ betrachtet. Es wird nicht vorausgesetzt, daß τ eine Grenzkreisuniformisierende ist. Nunmehr lassen sich die bekannten Sätze über Abelsche Integrale, ihre Perioden und die Riemannschen Periodenrelationen übertragen (§§ 2—4). Die Analoga der Abelschen Integrale haben Perioden, welche Polynome in τ sind.

Hierauf werden die Ergebnisse auf gewisse Korrespondenzen von $\mathfrak{R}$ zu sich angewandt, die in § 5 von unserem Standpunkt aus überhaupt erst erklärt werden müssen. Die Korrespondenzen erfahren in den Moduln der Differentiale 1. Gattung Darstellungen. Die Spur für eine solche Darstellung wird in § 6 bestimmt, und dieses scheint mir das Kernstück der Arbeit zu sein. Die zum Verständnis des Ergebnisses (58), (59) oder (60) notwendigen Erläuterungen können hier leider nicht vorweggenommen werden. Im Falle der Modulfunktionen und Modularkorrespondenzen nimmt die Spurformel die Gestalt (62) an. Diese Formel wurde erstmalig von A. Selberg auf dem International Colloquium on Zeta Functions in Bombay im Februar 1956 ohne Beweis mitgeteilt; vgl. [8]. Andere Spezialfälle von (60), für Modulformen (-4)-ten Grades bezüglich einer Kongruenzuntergruppe der Modulgruppe, waren mir seit dem Jahre 1954 bekannt; sie lassen sich alle aus dem Spezialfall (62) für $n=4$ herleiten, für den ich kürzlich einen (überaus komplizierten) Beweis veröffentlichte [3].

Man wird bei aufmerksamem Lesen bemerken, daß die wesentlichsten Schlüsse in dieser Arbeit von algebraischer Natur sind. Der hier immer wieder benutze Cauchysche Integralsatz ist in diesem Zusammenhang ja nichts anderes als der rein algebraische Satz, daß die Summe der Residuen eines Differentials 0 ist. Jedoch, wenn auch die Eliminierung wesentlich analytischer Hilfsmittel den Erfolg hatte, die Spurformel unter allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen, so bleibt doch die reizvolle Aufgabe, den Beweis noch weiter mit algebraischen Methoden zu durchdringen. Hierbei wird man sich allerdings auf einen weiteren Standpunkt stellen müssen, den A. WEIL im Jahre 1938 aufgezeigt hat [6], [7]. Der Zusammenhang dieser Arbeit mit denen von WEIL wird ganz am Schluß auseinandergesetzt werden.

§ 1. Voraussetzungen und Bezeichnungen

1. Eine endliche Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ sei vorgelegt; ihr Geschlecht sei g. Auf $\mathfrak{R}$ seien h Punkte $\mathfrak{z}_\nu$ und k Punkte $\mathfrak{e}_\lambda$ ausgezeichnet; den letzteren seien natürliche Zahlen $n_\lambda > 1$ zugeordnet. Dabei wird

$$2g-2+h+\sum_{\lambda=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)>0 \tag{1}$$

vorausgesetzt. Die $\mathfrak{z}_\nu$ werden stets als die *Spitzen*, die $\mathfrak{e}_\lambda$ als die *Ecken* bezeichnet werden; der Grund dieser Bezeichnungsweise wird später klar werden.

Es gebe auf der so punktierten Fläche $\mathfrak{R}$ eine Funktion τ mit folgenden drei Eigenschaften: 1) Die inverse Abbildungsfunktion der τ-Ebene auf $\mathfrak{R}$ ist überall, auch in den Ecken und Spitzen, holomorph. 2) Bei analytischer Fortsetzung längs geschlossener Wege erfährt τ lineare Transformationen $\varepsilon\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. 3) Bei n_λ-facher Umkreisung der Ecke $\mathfrak{e}_\lambda$ geht τ in sich über. Dasselbe gilt dann natürlich auch bei analytischer Fortsetzung längs solcher Wege, die aus n_λ-fachen Umkreisungen der $\mathfrak{e}_\lambda$ kombinierbar sind. Wir setzen nun voraus, daß τ bei Fortsetzung längs anderer geschlossener Wege nicht in sich selber übergeht.

Die Funktion τ läßt sich in bekannter Weise als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen einer linearen Differentialgleichung auf $\mathfrak{R}$ darstellen, deren höchster Koeffizient 1 ist, und deren übrige Koeffizienten in den Ecken und Spitzen in gewisser Weise singulär sind, aber auch nur dort.

Die Funktion τ bildet nun die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$, von der man nur die Spitzen entfernt hat, auf eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\mathfrak{T}$ ab. $\mathfrak{T}$ ist eine Überlagerung von $\mathfrak{R}$, dabei sind sämtliche über einer Ecke $\mathfrak{e}_\lambda$ liegenden Punkte von $\mathfrak{T}$ n_λ-fache Verzweigungen. In welcher Weise $\mathfrak{T}$ über der komplexen τ-Ebene liegt, interessiert hier nicht; insbesondere wird nicht vorausgesetzt, daß $\mathfrak{T}$ das Innere eines Halbkreises ist, wie bei der Grenzkreisuniformisierung. Aus der Voraussetzung (1) läßt sich allerdings folgern, daß $\mathfrak{T}$ weder die volle τ-Ebene noch die um den unendlich fernen Punkt ergänzte Vollebene ist.

Die Gruppe der geschlossenen Wege in der punktierten Fläche $\mathfrak{R}$ (mit der zusätzlichen Verabredung, daß eine n_λ-fache Umkreisung von $\mathfrak{e}_\lambda$ als ein geschlossener Weg anzusehen ist), stellt sich nun einerseits durch lineare Substitutionen dar, andererseits als eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe konformer Abbildungen von $\mathfrak{T}$ auf sich. Ein Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ dieser Gruppe ist dabei ein Abbild der geeignet aufgeschnittenen Fläche $\mathfrak{R}$, welches überall konform ist, abgesehen von den Ecken $\mathfrak{e}_\lambda$, wo eine Vollumgebung in $\mathfrak{R}$ auf einen Sektor vom Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{n_\lambda}$ in $\mathfrak{F}$ abgebildet wird, und ferner abgesehen von den Spitzen, wo eine Vollumgebung in $\mathfrak{R}$ auf einen von zwei einander berührenden Kreisen gebildeten krummlinigen Sektor in $\mathfrak{F}$ abgebildet wird. Das heißt, $\mathfrak{F}$ hat in den zu den $\mathfrak{e}_\lambda$ gehörigen Punkten Ecken vom Winkel $\frac{2\pi}{n_\lambda}$ und in den zu den $\mathfrak{s}_\nu$ gehörigen Punkten Spitzen vom Winkel 0.

Die Gruppe der Abbildungen von $\mathfrak{T}$ auf sich soll mit Γ bezeichnet werden; sie besteht, wie wir sahen, aus linearen Substitutionen. Durch Vorgabe eines Fundamentalbereichs in der bekannten kanonischen Form wird gleichzeitig ein System von Erzeugenden $\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\nu, \delta_\lambda$ $(\mu = 1, 2, \ldots, g;\ \nu = 1, 2, \ldots, h;$ $\lambda = 1, 2, \ldots, k)$ mit den definierenden Relationen

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\ldots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1\ldots\gamma_h\delta_1\ldots\delta_k = \delta_\lambda^{n_\lambda} = 1 \tag{2}$$

geliefert; wir haben hier die Gruppeneins mit dem Symbol 1 bezeichnet. Die linearen Substitutionen werden stets so geschrieben werden:

$$\varepsilon\tau = \frac{a_\varepsilon\tau + b_\varepsilon}{c_\varepsilon\tau + d_\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} a_\varepsilon & b_\varepsilon \\ c_\varepsilon & d_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Über die Elemente von Γ ist noch das Folgende bekannt: 1) Die γ_ν lassen sich durch geeignete, nicht notwendig zu Γ gehörige lineare Substitutionen ϱ in die Normalform

$$\varrho^{-1}\gamma_\nu\varrho = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0 \tag{3}$$

transformieren. Sie besitzen in dieser Form den Fixpunkt $\tau = i\,\infty$, und dieser ist ein Randpunkt der Fläche $\mathfrak{T}$. Eine lokale Uniformisierende in der Umgebung von $\mathfrak{s}_\nu$ ist

$$z = e^{2\pi i\tau}. \tag{4}$$

2) Die δ_λ sind durch geeignete, nicht notwendig zu Γ gehörige lineare Substitutionen in die Normalform

$$\varrho^{-1}\delta_\lambda\varrho = a\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0 \tag{5}$$

transformierbar, wo ζ eine primitive n_λ-te Einheitswurzel ist. Sie besitzen in dieser Form die Fixpunkte $\tau = 0,\ \infty$ und von diesen liegt einer im Inneren von $\mathfrak{T}$. Eine lokale Uniformisierende in der Umgebung von $\mathfrak{e}_\lambda$ ist

$$z = \tau^{n_\lambda}. \tag{6}$$

3) Alle Elemente ε, welche nicht mit einem der γ_ν oder δ_λ konjugiert sind, lassen sich durch geeignete, nicht notwendig zu Γ gehörige lineare Substitutionen in die Normalform

$$\varrho^{-1}\varepsilon\varrho = a\begin{pmatrix}\vartheta & 0\\ 0 & \vartheta^{-1}\end{pmatrix}, \qquad a \neq 0 \tag{7}$$

mit reellem $\vartheta \neq 1$ transformieren. Die Fixpunkte eines solchen ε gehören nicht zu $\mathfrak{T}$.

2. Es sei $n \geqq 1$ eine bis zum Schluß festgehaltene natürliche Zahl. Wir betrachten homogene Funktionen $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ in zwei Variablen vom Grade $-n$ und homogene Funktionen $\Phi(\tau_1, \tau_2)$ vom Grade $(n-2)$. Durch die Festsetzungen

$$\varphi(\tau_1, \tau_2)\,[\varepsilon]^{-n} = \varphi(a_\varepsilon\tau_1 + b_\varepsilon\tau_2,\, c_\varepsilon\tau_1 + d_\varepsilon\tau_2)\cdot(a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon)^{\frac{n}{2}},$$
$$\Phi(\tau_1, \tau_2)\,[\varepsilon]^{n-2} = \Phi(a_\varepsilon\tau_1 + b_\varepsilon\tau_2,\, c_\varepsilon\tau_1 + d_\varepsilon\tau_2)\cdot(a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon)^{\frac{2-n}{2}}$$

werden jeder linearen Substitution ε je ein Operator $[\varepsilon]^{-n}$ und $[\varepsilon]^{n-2}$ im Raume der homogenen Funktionen der Grade $-n$ und $n-2$ zugeordnet. Speziell ist $[1]^{-n}$ und $[1]^{n-2}$ jeweils der Einheitsoperator. Wir werden allerdings die zugehörigen inhomogenen Formen

$$\varphi(\tau) = \varphi\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \varphi(\tau_1, \tau_2)\,\tau_2^n, \qquad \Phi(\tau) = \Phi\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \Phi(\tau_1, \tau_2)\,\tau_2^{2-n}$$

benutzen. Dann schreiben sich obige Operatoren so:

$$\varphi(\tau)\,[\varepsilon]^{-n} = \varphi(\varepsilon\tau)\,\frac{(a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}{(c_\varepsilon\tau + d_\varepsilon)^n}, \tag{8}$$

$$\Phi(\tau)\,[\varepsilon]^{n-2} = \Phi(\varepsilon\tau)\,\frac{(c_\varepsilon\tau + d_\varepsilon)^{n-2}}{(a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{9}$$

Bei ungeradem n ist das Vorzeichen in (8) und (9) zweideutig. Wir werden diese Operatoren aber nur dann bei ungeradem n benutzen, wenn $a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon > 0$ ist und verabreden, daß auch die Quadratwurzel positiv genommen werden soll. Jetzt sind (8) und (9) eindeutig definiert.

Die Bezeichnung von Formen vom Grade $-n$ mit kleinen griechischen Buchstaben und von Formen vom Grade $n-2$ mit großen griechischen Buchstaben wird durchweg festgehalten.

Spezielle Formen vom Grade $n-2$ sind die Polynome dieses Grades. Für sie wird durch (9) eine Darstellung der projektiven linearen Gruppe in zwei Variablen geliefert.

3. Unter einer *automorphen Form* $\varphi(\tau)$ *vom Grade* $-n$ versteht man eine Funktion, die den Funktionalgleichungen $\varphi(\tau)\,[\varepsilon]^{-n} = \varphi(\tau)$ für alle $\varepsilon \in \Gamma$ genügt, und die überall auf $\mathfrak{R}$, einschließlich der Ecken und Spitzen meromorph ist. Entsprechendes verlangt man von einer automorphen Form $\Phi(\tau)$ vom Grade $n-2$.

Wegen

$$d\varepsilon\tau = \frac{a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon}{(c_\varepsilon \tau + d_\varepsilon)^2}\, d\tau$$

ist für eine automorphe Form $\varphi(\tau)$ von geradem Grade $-n = -2f$: $\varphi(\tau)\, d\tau^f$ ein invariantes Differential f-ten Grades, d.h. es gilt

$$\varphi(\varepsilon\tau)\, d\varepsilon\tau^f = \varphi(\tau)\, d\tau^f.$$

Einem solchen Differential ist bekanntlich durch die folgende Vorschrift ein Divisor $\mathfrak{f}$ zugeordnet: $\mathfrak{f}$ ist durch einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ ebensooft teilbar wie die Funktion $\varphi(\tau)\left(\frac{d\tau}{dz}\right)^f$, wo z eine lokale Uniformisierende an der Stelle $\mathfrak{p}$ (die mit dem gleichen Symbol wie der zugehörige Primdivisor bezeichnet werden darf) ist. Dieser Divisor gehört der f-ten Potenz der Differentialklasse W an. Umgekehrt läßt sich auch zu jedem Divisor $\mathfrak{f}$ aus dieser Klasse eine automorphe Form des Grades $-n$ angeben.

Wir wollen nun die Dimension der Schar der *ganzen automorphen Spitzenformen* des Grades $-n = -2f$ bestimmen. Darunter versteht man die überall auf $\mathfrak{R}$ holomorphen und in den Spitzen verschwindenden automorphen Formen. Eine in einem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{p}$ holomorphe Form ist dadurch gekennzeichnet, daß der zugehörige Divisor $\mathfrak{f}$ für $\mathfrak{p}$ ganz ist, denn man kann als lokale Uniformisierende $z = \tau$ nehmen. In einer Ecke $\mathfrak{e}_\lambda$ nehmen wir die Uniformisierende (6). Es ist dann

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{n_\lambda} z^{\frac{1}{n_\lambda}-1}.$$

Demnach ist die in $\mathfrak{f}$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{e}_\lambda$ unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\tau)$ hier holomorph ist, mindestens $\mathfrak{e}_\lambda^{-\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right]}$. In einer Spitze $\mathfrak{s}_\nu$ nehmen wir die Uniformisierende (4). Es ist dann

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{2\pi i} z^{-1}.$$

Demnach ist die in $\mathfrak{f}$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{s}_\nu$ unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\tau)$ hier verschwindet, mindestens $\mathfrak{s}_\nu^{1-f}$.

Der Divisor $\mathfrak{f}$ hat hiernach die Form

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \cdot \prod_{\nu=1}^{h} \mathfrak{s}_\nu^{1-f} \cdot \prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{e}_\lambda^{-\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right]} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{P}^{-1}$$

mit einem ganzen Divisor $\mathfrak{g}$. Dieser gehört der Klasse $W^f\mathfrak{P}$ an, deren Grad $2f(g-1) + h(f-1) + \sum\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right]$ ist. Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren $\mathfrak{g}$ dieser Klasse ist nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$G_n = (n-1)(g-1) + h\left(\frac{n}{2}-1\right) + \sum_{\lambda=1}^{k}\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right] + \dim\left(W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1}\right)$$

Die Klasse $W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1}$ hat den Grad

$$\operatorname{Grad}(W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1}) = -(f-1)(2g-2+h) - \sum_{\lambda=1}^{k}\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right].$$

Dieser ist 0 für $f=1$; dann ist $W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1}$ die Einheitsklasse, und ihre Dimension gleich 1. Wir behaupten, daß $\operatorname{Grad}(W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1})<0$ für $f>1$ ist. Zum Beweise verifiziert man zunächst

$$\left[\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)f\right] = f-1-\left[\frac{f-1}{n_\lambda}\right]. \tag{10}$$

Jetzt ist

$$\frac{1}{f-1}\operatorname{Grad}(W^{1-f}\mathfrak{P}^{-1})$$
$$= -\left(2g-2+h+\sum_{\lambda=1}^{k}\left(1-\frac{1}{f-1}\left[\frac{f-1}{n_\lambda}\right]\right)\right) \leqq -\left(2g-2+h+\sum_{\lambda=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n_\lambda}\right)\right),$$

und das ist <0 wegen der Voraussetzung (1).

Das Endergebnis lautet: *Der Rang der Schar der ganzen automorphen Spitzenformen von geradem Grade $-n$ ist unter der Voraussetzung* (1)

$$G_n = \begin{cases} g & \text{für } n=2, \\ (n-1)(g-1)+h\,\frac{n-2}{2}+\sum_{\lambda=1}^{k}\left(\frac{n-2}{2}-\left[\frac{n-2}{2n_\lambda}\right]\right) & \text{für } n>2. \end{cases} \tag{11}$$

§ 2. Die Integrale und ihre Perioden

1. Eine ganze automorphe Spitzenform vom Grade $-n$ soll fortan kurz eine *automorphe Form $(-n)$-ten Grades und 1. Gattung* genannt werden. Für eine solche ist das Integral

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

vom Wege unabhängig. Eine nicht überall holomorphe Spitzenform (die also in allen Spitzen verschwindet), für die aber dieses Integral auch wegunabhängig ist, soll eine *automorphe Form $(-n)$-ten Grades und 2. Gattung* heißen. Ein solches $\varphi(\tau)$ hat in dem Pol $\tau=\tau_1$ den Hauptteil

$$\sum_{m\geq 0}\frac{c_m}{(\tau-\tau_1)^{n+m}}.$$

Die Integrale $\Phi(\tau)$ heißen *Integrale 1. oder 2. Gattung*. Sie können auch durch $(n-1)$-fache unbestimmte Integration der Formen $(-n)$-ten Grades gewonnen werden. Es ist daher sinngemäß, ein willkürliches Polynom $\Theta(\tau)$ vom Grade $n-2$ als „Integrationskonstante" auf der rechten Seite hinzuzufügen:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\varphi(\sigma)\,d\sigma + \Theta(\tau). \tag{12}$$

Durch die Variablensubstitution $\sigma = \varepsilon(\zeta)$ auf der rechten Seite von (12) zeigt man

$$\Phi(\tau)\,[\varepsilon]^{n-2} = \Phi(\tau) + \Omega_\varepsilon(\tau) \tag{13}$$

mit

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon(\tau) = \Theta(\tau)\left([\varepsilon]^{n-2} - [1]^{n-2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{(n-2)!}\displaystyle\int_{\tau_0}^{\varepsilon\tau_0} (a_\varepsilon\tau + b_\varepsilon - (c_\varepsilon\tau + d_\varepsilon)\sigma)^{n-2}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma. \end{cases} \tag{14}$$

Bei Anwendung des Operators $[\varepsilon]^{n-2}$ addiert sich also zu $\Phi(\tau)$ die „Periode" $\Omega_\varepsilon(\tau)$, ein Polynom vom Grade $n-2$.

2. Sei umgekehrt $\Phi(\tau)$ irgendeine meromorphe Funktion, welche für alle $\varepsilon \in \Gamma$ der Funktionalgleichung (13) mit irgendwelchen Polynomen $\Omega_\varepsilon(\tau)$ vom Grade $n-2$ genügt. Dann ist

$$\varphi(\tau) = \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{n-1} \Phi(\tau) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\tau)^n}, \tag{15}$$

das Integral erstreckt über einen kleinen Kreis um $\sigma = \tau$ [unter der Voraussetzung, daß $\Phi(\sigma)$ hier holomorph ist], eine automorphe Form vom Grade $-n$. Substituiert man nämlich in dem Integral $\sigma = \varepsilon(\zeta)$, so resultiert wegen (13)

$$\varphi(\tau)\,[\varepsilon]^{-n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int \frac{\Phi(\zeta)\,[\varepsilon]^{n-2}\,d\zeta}{(\zeta-\tau)^n} = \varphi(\tau).$$

Insbesondere ist die $(n-1)$-te Ableitung einer automorphen Form $(n-2)$-ten Grades eine solche vom Grade $-n$.

3. Man schreibe (13) in der Form

$$\Omega_\varepsilon = \Phi\left([\varepsilon]^{n-2} - [1]^{n-2}\right);$$

die Variable τ braucht in diesem Zusammenhang nicht erwähnt zu werden. Dann ergibt sich sofort für zwei Elemente ε, η aus Γ:

$$\Omega_{\varepsilon\eta} - \Omega_\varepsilon[\eta]^{n-2} - \Omega_\eta = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung läßt die folgende Deutung zu:

Die Polynome $(n-2)$-ten Grades bilden nach § 1, Nr. 2 einen Darstellungsmodul $\mathfrak{M}^{n-2}$ für die Gruppe Γ. Ω_ε ist demnach eine Abbildung von Γ in $\mathfrak{M}^{n-2}$. Man nennt allgemein Abbildungen dieser Art *Coketten*, Abbildungen der Eigenschaft (16) *geschlossene Coketten* oder *Cocyclen*. Spezielle Cocyclen sind die *Coränder* $\Theta\left([\varepsilon]^{n-2} - [1]^{n-2}\right)$. Cocyclen und Coränder bilden je eine additive Gruppe. Die Klassen der Cocyclen modulo der Untergruppe der Coränder sind die *Cohomologieklassen*.

Nach Nr. 1 ist also jeder automorphen Form 1. oder 2. Gattung eine Cohomologieklasse zugeordnet. Erst später wird sich zeigen, daß diese Zuordnung umkehrbar ist.

Wir notieren zum Schluß dieses Abschnittes zwei wichtige Eigenschaften der Perioden: *Für die speziellen Erzeugenden γ_ν, δ_λ von Γ (vgl. § 1, Nr. 1) gilt*

$$\Omega_{\gamma_\nu} = \Theta_\nu\left([\gamma_\nu]^{n-2} - [1]^{n-2}\right), \tag{17}$$

$$\Omega_{\delta_\lambda} = \Theta'_\lambda\left([\delta_\lambda]^{n-2} - [1]^{n-2}\right) \tag{18}$$

mit gewissen Polynomen Θ_ν, Θ'_λ $(n-2)$-ten Grades. Die Gl. (17) erhält man unmittelbar aus (14), wenn man als untere Grenze τ_0 des Integrals (12) die Spitze $\mathfrak{s}_\nu$ nimmt. (12) wird dann ein uneigentliches Integral, welches dann und nur dann existiert, wenn $\varphi(\tau)$ eine Spitzenform ist. Zum Beweise von (18) geht man von $\delta_\lambda^{n_\lambda} = 1$ aus. Aus (16) folgt dann

$$0 = \Omega_1 = \Omega_{\delta_\lambda^{n_\lambda}} = \Omega_{\delta_\lambda}\left([1]^{n-2} + [\delta_\lambda]^{n-2} + \cdots + [\delta_\lambda^{n_\lambda-1}]^{n-2}\right)$$

und hieraus weiter (18) mit

$$\Theta'_\lambda = \frac{1}{n_\lambda - 1}\Omega_{\delta_\lambda}\left((n_\lambda - 1)[1]^{n-2} + (n_\lambda - 2)[\delta_\lambda]^{n-2} + \cdots + [\delta_\lambda^{n_\lambda-1}]^{n-2}\right).$$

4. Es soll jetzt der Rang R_n der Schar der Cohomologieklassen unter der Voraussetzung (17) für alle Erzeugenden γ_ν berechnet werden. Die Zahl n soll dabei als gerade vorausgesetzt werden. Es ist

$$R_n = r_n - r_n^0, \tag{19}$$

wobei r_n, r_n^0 die Ränge der Gruppen der Cocyclen und der Coränder sind. Offenbar ist

$$r_n^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2 \\ n-1 & \text{für } n > 2. \end{cases} \tag{20}$$

Die Berechnung von r_n verläuft folgendermaßen. Man gebe Ω_{ε_i} für alle ε_i eines Erzeugendensystems von Γ vor und kann dann Ω_ε überall in Γ unter Benutzung von (16) berechnen. Man muß bei der Vorgabe der Ω_{ε_i} allerdings darauf achten, daß für jede der definierenden Relationen $\varepsilon_1^{a_1}\varepsilon_2^{a_2}\cdots = 1$ auch

$$0 = \Omega_1 = \Omega_{\varepsilon_1^{a_1}\varepsilon_2^{a_2}\ldots} = \Omega_{\varepsilon_1}\left([1]^{n-2} + [\varepsilon_1]^{n-2} + \cdots + [\varepsilon_1^{a_1-1}]^{n-2}\right)[\varepsilon_2^{a_2}\ldots]^{n-2} + \Omega_{\varepsilon_2^{a_2}\ldots}$$

gilt. Es wird das Erzeugendensystem aus § 1, Nr. 1 genommen werden.

Zunächst sei $n = 2$. Aus (17) folgt $\Omega_{\gamma_\nu} = 0$. Aus (18) folgt $\Omega_{\delta_\lambda} = 0$. Damit sind bereits alle Relationen (2) erfüllt bis auf die erste. Für $n = 2$ schreibt sich (16) so: $\Omega_{\varepsilon\eta} = \Omega_\varepsilon + \Omega_\eta$. Man kann die Ω_{α_μ}, Ω_{β_μ} willkürlich vorgeben, die erste Relation (2) ist erfüllt:

$$\Omega_{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\ldots} = \Omega_{\alpha_1} + \Omega_{\beta_1} - \Omega_{\alpha_1} - \Omega_{\beta_1} + - \cdots = 0.$$

Also ist $R_2 = g$.

Von jetzt ab sei $n > 2$. Wir unterscheiden verschiedene Fälle; zuerst werde $g > 0$ angenommen. Man gebe alle Ω_{α_μ}, Ω_{β_μ} bis auf Ω_{α_1}, Ω_{β_1} willkürlich vor, ebenso setze man die Ω_{γ_ν}, Ω_{δ_λ} in der Form (17), (18) mit willkürlichen Θ_ν, Θ'_λ an, und suche nun Ω_{α_1}, Ω_{β_1} so zu bestimmen, daß

$$\Omega_{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}}[\alpha_2\beta_2\ldots]^{n-2} + \Omega_{\alpha_2\beta_2\ldots} = 0 \tag{21}$$

gilt. (21) entspricht der ersten Relation in (2), während die übrigen bereits durch den Ansatz (18) erfüllt werden. Unter Benutzung von (16) findet man

$$\Omega_{\alpha_1^{-1}} = -\Omega_{\alpha_1}[\alpha_1^{-1}]^{n-2}$$

und weiter

$$\Omega_{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}} = \left(\Omega_{\alpha_1}([\beta_1]^{n-2} - [1]^{n-2}) - \Omega_{\beta_1}([\alpha_1]^{n-2} - [1]^{n-2})\right)[\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}]^{n-2}.$$

Demnach läßt sich (21) so schreiben:

$$(22)\quad \Omega_{\alpha_1}N_{\beta_1} - \Omega_{\beta_1}N_{\alpha_1} = C, \quad N_{\beta_1} = [\beta_1]^{n-2} - [1]^{n-2}, \quad N_{\alpha_1} = [\alpha_1]^{n-2} - [1]^{n-2},$$

ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten der Polynome $\Omega_{\alpha_1}, \Omega_{\beta_1}$, dessen rechte Seite sich aus den $\Omega_{\alpha_2}, \Omega_{\beta_2}$ usw. berechnet.

Zur Lösung von (22) gehen wir folgendermaßen vor: Wir zeigen, daß es eine Matrix P so gibt, daß

$$(23)\qquad PN_{\beta_1} + N_{\alpha_1}$$

die Determinante $\neq 0$ hat (die Operatoren $[\beta_1]^{n-2}$ usw. im Raume der Polynome $(n-2)$-ten Grades können ersichtlich auch als $(n-1)$-reihige Matrizen aufgefaßt werden). Nun schreiben wir (22) in der Form

$$\Omega_{\alpha_1}N_{\beta_1} - \Omega_{\beta_1}N_{\alpha_1} = (\Omega_{\alpha_1} + \Omega_{\beta_1}P)N_{\beta_1} - \Omega_{\beta_1}(PN_{\beta_1} + N_{\alpha_1}) = C.$$

Hier können wir $\Omega_{\alpha_1} + \Omega_{\beta_1}P$ willkürlich vorgeben und dann Ω_{β_1} und Ω_{α_1} in eindeutiger Weise berechnen. Zugleich erkennt man, daß (22) genau $n-1$ linear unabhängige Lösungen besitzt.

Zur Untersuchung der Matrix (23) nimmt man β_1 in der Normalform (7) an. Dann ist N_{β_1} die Diagonalmatrix mit den Elementen $\vartheta^{n-2}-1, \ldots, \vartheta^2-1, 0, \vartheta^{-2}-1, \ldots, \vartheta^{2-n}-1$. Es gibt also eine nicht singuläre Matrix M, so daß

$$MN_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Man schreibe $PM^{-1} = Q = (q_{ik})$, $N_{\alpha_1} = (h_{ik})$. Dann ist

$$PN_{\beta_1} + N_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} q_{11} + h_{11} \cdots q_{1,t-1} + h_{1,t-1} & h_{1t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{t1} + h_{t1} \cdots q_{t,t-1} + h_{t,t-1} & h_{tt} \end{pmatrix}$$

$(t = n-1)$. Wenn nun die Determinante von (23) für alle P verschwinden würde, so wäre $h_{1t} = \cdots = h_{tt} = 0$. Dann gäbe es einen sowohl von N_{β_1} wie von N_{α_1} annullierten Vektor, nämlich $(0, \ldots, 0, 1)$. Dieses führt aber auf einen Widerspruch. Dem von N_{β_1} und N_{α_1} annullierten Vektor entspricht ein bei $[\alpha_1]^{n-2}$ und $[\beta_1]^{n-2}$ invariantes Polynom $F(\tau)$. Nimmt man β_1 wie bisher in der Normalform (7) an, so ist $F(\tau) = c\,\tau^{\frac{n-2}{2}}$. Nun hat man

$$\tau^{\frac{n-2}{2}}[\alpha_1]^{n-2} = \left(\frac{(a_{\alpha_1}\tau + b_{\alpha_1})(c_{\alpha_1}\tau + d_{\alpha_1})}{a_{\alpha_1}d_{\alpha_1} - b_{\alpha_1}c_{\alpha_1}}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \tau^{\frac{n-2}{2}}.$$

Das ist aber nur möglich, wenn $b_{\alpha_1} = c_{\alpha_1} = 0$ oder $a_{\alpha_1} = d_{\alpha_1} = 0$ ist. Im ersteren Falle wäre $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} = 1$, im letzteren $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} = \beta_1^{-2}$. Es würden also in beiden Fällen Relationen bestehen, die in (2) nicht vorkommen. (Wegen (1) ist nicht gleichzeitig $g = 1$, $h = k = 0$.)

Um die Gesamtheit der linear unabhängigen Cocyclen übersehen zu können, muß man noch wissen, wieviele linear unabhängige Θ_ν, Θ'_λ durch die Ansätze (17), (18) annulliert werden. Man nimmt γ_ν in der Normalform (3) an und sieht dann unmittelbar, daß $[\gamma_\nu]^{n-2} - [1]^{n-2}$ den Rang $n-2$ hat. Von $[\gamma_\nu]^{n-2} - [1]^{n-2}$ wird also nur ein Θ_ν und dessen Vielfache annulliert. Man nimmt weiter δ_λ in der Normalform (5) an. $[\delta_\lambda]^{n-2} - [1]^{n-2}$ läßt sich dann auf die Diagonalgestalt mit den Elementen $\zeta^{\frac{n-2}{2}} - 1, \zeta^{\frac{n-4}{2}} - 1, \ldots, \zeta - 1, 0,$ $\zeta^{-1} - 1, \ldots, \zeta^{\frac{2-n}{2}} - 1$ transformieren. Von diesen sind $1 + 2\left[\frac{n-2}{2n_\lambda}\right]$ gleich 0. Ebenso viele linear unabhängige Θ'_λ gibt es, die von $[\delta_\lambda]^{n-2} - [1]^{n-2}$ annulliert werden.

Unter der Voraussetzung $g > 0$ haben wir also das Resultat erhalten:

Der Rang der Gruppe der Cohomologieklassen, deren Elemente die Eigenschaft (17) *haben, ist für ein gerades* n*:*

$$(24) \qquad R_n = \begin{cases} 2g & (n = 2) \\ 2(n-1)(g-1) + h(n-2) + \sum_{\lambda=1}^{k} \left(n - 2 - 2\left[\frac{n-2}{2n_\lambda}\right]\right) & (n > 2). \end{cases}$$

Es gibt in jeder Cohomologieklasse Cocyclen, deren Koeffizienten demselben Körper angehören wie die Koeffizienten der Darstellung $[\varepsilon]^{n-2}$ *von* Γ.

Die Voraussetzung $g > 0$ läßt sich aber noch als entbehrlich nachweisen.

5. Wir beweisen (24) noch unter der Voraussetzung $g = 0$, $h > 0$. Jetzt setzt man Ω_{γ_ν} $(\nu = 2, \ldots, h)$, Ω_{δ_λ} $(\lambda = 1, \ldots, k)$ gemäß (17), (18) an und hat Ω_{γ_1} aus

$$\Omega_{\gamma_1}[\gamma_2 \ldots]^{n-2} + \Omega_{\gamma_2 \ldots} = 0 \quad \text{oder} \quad \Omega_{\gamma_1} = -\Omega_{\gamma_2 \ldots}[(\gamma_2 \ldots)^{-1}]^{n-2}$$

zu bestimmen. Durch diese Gleichung ist Ω_{γ_1} eindeutig festgelegt. Es gibt somit

$$(h-1)(n-2) + \sum_{\lambda=1}^{k} \left(n - 2 - 2\left[\frac{n-2}{2n_\lambda}\right]\right)$$

linear unabhängige Cocyclen. Diese erfüllen für $\nu = 2, \ldots, h$ die Gl. (17), dagegen nicht alle für $\nu = 1$. Setzt man γ_1 in der Normalform (3) an, so bedeutet (17), daß Ω_{γ_1} ein Polynom vom Grade $n-3$ ist. Sind Ω_ε und Ω'_ε zwei beliebige Cocyclen, so hat stets eine nicht verschwindende Linearkombination $c\Omega_\varepsilon + c'\Omega'_\varepsilon = \Omega''_\varepsilon$ die Eigenschaft, daß Ω''_{γ_1} vom Grade $n-3$ ist. Die Anzahl der linear unabhängigen Cocyclen, die für alle ν die Gl. (17) befriedigen, ist demnach um 1 kleiner als die oben angegebene Zahl. Subtrahiert man weiter

die Anzahl $r_n^0 = n-1$ der linear unabhängigen Coränder, so erhält man wieder die Anzahl (24) linear unabhängiger Cohomologieklassen der Eigenschaft (17).

Falls $g = h = 0$ ist, wird sich (24) später (in § 4) nebenher ergeben.

§ 3. Die Periodenrelationen

1. Es seien $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ zwei automorphe Formen 1. oder 2. Gattung und $\Phi(\tau)$ das Integral (12) der ersteren. Man denke sich ferner $\mathfrak{R}$ in ein oder mehrere einfach zusammenhängende Stücke $\mathfrak{R}_i$ zerschnitten, wobei die Ecken und Spitzen auf dem Rande liegen, dagegen keine Singularitäten von $\varphi(\tau)$ oder $\psi(\tau)$. Man bilde nun die folgenden Integrale um die Ränder der $\mathfrak{R}_i$ in positivem Sinne. Die Summe dieser Integrale wird nach Division durch $2\pi i$ mit

$$I(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} \Phi(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

bezeichnet. *$I(\varphi,\psi)$ ist von der willkürlichen Integrationskonstanten in $\Phi(\tau)$ und von der Art der Zerschneidung von $\mathfrak{R}$ unabhängig.*

Da $\Phi(\tau)$ das $(n-1)$-fache unbestimmte Integral von $\varphi(\tau)$ ist, kann man $I(\varphi,\psi)$ durch $(n-1)$-fache partielle Integration umformen und erhält

$$I(\varphi,\psi) = (-1)^{n-1} I(\psi,\varphi). \tag{26}$$

Bei dieser Umformung zeigt es sich insbesondere, daß die Integrationskonstante von $\Phi(\tau)$ herausfällt. Also ist (25) eine Invariante von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$.

Dieselbe Überlegung ist für die Randintegrale um die einzelnen Stücke $\mathfrak{R}_i$ von $\mathfrak{R}$ gültig. Wenn man nun von $\mathfrak{R}_i$ ein Stück $\mathfrak{R}_{i1}$ abtrennt und an ein anderes Stück $\mathfrak{R}_k$ ansetzt, so vermindert sich das Integral über $\mathfrak{R}_i$ um das über $\mathfrak{R}_{i1}$, und das Integral über $\mathfrak{R}_k$ vermehrt sich um das über $\mathfrak{R}_{i1}$, wobei der Integrand möglicherweise auf einem nicht nullhomologen Wege fortgesetzt wurde und daher um eine Periode von $\Phi(\tau)$ mal $\psi(\tau)$ anwächst. Wie wir aber schon sahen, ändert sich dabei das Integral über $\mathfrak{R}_{i1}$ nicht. Also bleibt auch die Summe (25) aller Teilintegrale bei Umformungen der Zerschneidung ungeändert.

Die Definition (25) *versagt, wenn $\varphi(\tau)$ oder $\psi(\tau)$ Singularitäten in den Ecken oder Spitzen haben.* Eine Zerschneidung von $\mathfrak{R}$ führt nämlich immer in diese hinein; daher kann man das Schnittsystem jetzt nicht so legen, daß es Singularitäten vermeidet. *In diesem Falle spare man diese Singularitäten durch kleine Kreisbögen aus, addiere dafür aber das Residuum des Integranden (gemessen in der lokalen Uniformisierenden).* Dieses Residuum liegt trotz der Willkür bei der Wahl der Integrationskonstanten von $\Phi(\tau)$ eindeutig fest, da $\psi(\tau)$ als automorphe Form 2. Gattung keine Terme $c_\nu(z-z_0)^{-\nu}$ mit $1 \leqq \nu \leqq n-1$ in der Laurent-Entwicklung um einen Punkt $\tau = \tau_0$ und keinen konstanten Term in der zu einer Spitze $\mathfrak{s}_\nu$ gehörigen Fourier-Entwicklung besitzt.

2. *$I(\varphi,\psi)$ verschwindet, wenn $\varphi(\tau)$ die $(n-1)$-te Ableitung einer automorphen Spitzenform $\Phi(\tau)$ vom Grade $n-2$ ist.* Dann ist nämlich der Integrand von (25) ein Differential auf $\mathfrak{R}$, welches in den Spitzen ganz ist. $I(\varphi,\psi)$ ist die Summe aller Residuen dieses Differentials, und diese ist bekanntlich 0.

$I(\varphi, \psi)$ verschwindet, wenn $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ beide von 1. Gattung sind. Dann ist nämlich der Integrand von (25) holomorph.

3. *$I(\varphi, \psi)$ ist eine bilineare Funktion in den Perioden der Integrale von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$.*

Sind speziell weder Ecken noch Spitzen vorhanden, so hat diese bilineare Funktion ganze rationale Koeffizienten, bis auf einen gemeinsamen Faktor $\frac{1}{2\pi i}$.

Man gehe zum Beweise von einer Zerschneidung von $\mathfrak{R}$ zu einem einfach zusammenhängenden Flächenstück aus. Der Rand besteht dann aus einer Anzahl von Schnitten A_μ, welche durch gewisse Gruppenelemente ε_μ paarweise einander zugeordnet sind; wegen der Orientierbarkeit von $\mathfrak{R}$ werden die Integrale über A_μ und $\varepsilon_\mu A_\mu$ in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Man hat also

$$I(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_\mu \left(\int_{A_\mu} \Phi(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau - \int_{\varepsilon_\mu A_\mu} \Phi(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau \right).$$

Man nehme in den Integralen über $\varepsilon_\mu A_\mu$ die Variablensubstitutionen $\tau = \varepsilon_\mu \sigma$ vor und erhält dann auf Grund von (13)

$$I(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_\mu \int_{A_\mu} \Omega_{\varepsilon_\mu}(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau,$$

wobei die $\Omega_{\varepsilon_\mu}(\tau)$ die den ε_μ entsprechenden Perioden des Integrals $\Phi(\tau)$ von $\varphi(\tau)$ sind. Also läßt sich $I(\varphi, \psi)$ einerseits als eine Linearform in den Koeffizienten der $\Omega_{\varepsilon_\mu}(\tau)$ für gewisse ε_μ schreiben. Andererseits ist aber $I(\varphi, \psi)$ auch wegen (26) eine Linearform in den Koeffizienten der Perioden Ω_{ε_μ} Integrals $\Psi(\tau)$ von $\psi(\tau)$. Das ergibt die erstere Behauptung.

$I(\varphi, \psi)$ läßt sich explizite berechnen, wenn keine Ecken und Spitzen vorhanden sind. Man geht dann von einer kanonischen Zerschneidung von $\mathfrak{R}$ mit der Seitenfolge $A_1, B_1, -\alpha_1 A_1, -\beta_1 B_1, A_2, \ldots, -\beta_g B_g$ aus; $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sollen die Bedeutung von § 1, Nr. 1 haben, und das Minuszeichen soll den der Integrationsrichtung entgegengesetzten Richtungssinn anzeigen. Man bezeichne die Ecke zwischen $-\beta_g B_g$ und A_1 mit τ_1, die Ecke zwischen A_1 und B_1 mit τ_2, und von dort ab fortlaufend mit τ_3, τ_4, usw. Alle diese Ecken entsprechen einem einzigen Punkt in $\mathfrak{R}$, d.h. die τ_μ gehen aus τ_1 durch Elemente der Gruppe Γ hervor. Und zwar findet man durch leichte Überlegung

$$\tau_2 = \alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1, \quad \tau_3 = \beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1, \quad \tau_4 = \alpha_1\tau_1, \quad \tau_5 = \beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1.$$

Nun ist in verständlicher Abkürzung

$$I(\varphi, \psi) = \sum_{\mu=1}^{g} I_\mu(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{g} \left(\int_{A_\mu} + \int_{B_\mu} - \int_{\alpha_\mu A_\mu} - \int_{\beta_\mu B_\mu} \right)$$

und

$$I_1(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_1}^{\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1} \Omega_{\alpha_1}\, \psi\, d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1}^{\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1} \Omega_{\beta_1}\, \psi\, d\tau.$$

Im zweiten Integral rechts substituiert man $\tau = \beta_1^{-1}\alpha_1\sigma$ und erhält dann unter Benutzung von (16)

$$I_1(\varphi,\psi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_1}^{\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1} \Omega_{\alpha_1}\psi\, d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_1}^{\alpha_1^{-1}\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\tau_1} (\Omega_{\alpha_1} - \Omega_{\beta_1^{-1}\alpha_1})\,\psi\, d\tau.$$

Die zweite der oben ausgesprochenen Behauptungen wird hiernach bewiesen sein, wenn man zeigt, daß das Integral

$$2\pi i\, I_{\eta,\varepsilon}(\varphi,\psi) = \int_{\tau_1}^{\varepsilon\tau_1} \Omega_\eta(\tau)\,\psi(\tau)\, d\tau$$

für zwei beliebige Elemente $\varepsilon, \eta \in \Gamma$ eine bilineare Form mit ganzen rationalen Koeffizienten in den Koeffizienten von $\Omega_\eta(\tau)$ und $\Omega'_{\varepsilon^{-1}}(\tau)$ ist. Dabei darf man die Integrationskonstanten von $\Psi(\tau)$ unterdrücken, da diese nach Nr. 1 in $I(\varphi,\psi)$ nicht eingehen; als untere Grenze des Integrals (12) nehme man $\tau_0 = \tau_1$. Es ist dann nach (14)

$$\Omega'_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_1}^{\varepsilon\tau_1} (\tau-\sigma)^{n-2}\psi(\sigma)\, d\sigma \cdot [\varepsilon]^{n-2}.$$

Daraus folgt nach (16)

$$\Omega'_{\varepsilon^{-1}}(\tau) = -\frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_1}^{\varepsilon\tau_1} (\tau-\sigma)^{n-2}\psi(\sigma)\, d\sigma.$$

Folglich ist

$$\Omega'_{\varepsilon^{-1}}(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n-2} c'_\nu(\varepsilon^{-1})\,\tau^\nu = -\sum_{\nu=0}^{n-2} \tau^\nu \cdot \frac{\binom{n-2}{\nu}}{(n-2)!}\int_{\tau_1}^{\varepsilon\tau_1} (-\sigma)^{n-2-\nu}\psi(\sigma)\, d\sigma$$

oder

$$\int_{\tau_1}^{\varepsilon\tau_1} \sigma^\nu\psi(\sigma)\, d\sigma = -(-1)^\nu \nu!\,(n-2-\nu)!\, c'_{n-2-\nu}(\varepsilon^{-1}).$$

Setzt man endlich

$$\Omega_\eta(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n-2} c_\nu(\eta)\,\tau^\nu,$$

so wird

$$2\pi i\, I_{\eta,\varepsilon}(\varphi,\psi) = -\sum_{\nu=0}^{n-2}(-1)^\nu \nu!\,(n-2-\nu)!\, c_\nu(\eta)\, c'_{n-2-\nu}(\varepsilon^{-1}),$$

womit alles bewiesen ist.

Die explizite Gestalt der Bilinearform $I(\varphi,\psi)$ sieht allerdings recht kompliziert aus. Einzig für $n=2$ erhält man ein einfaches Resultat, nämlich

$$I(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{g} (\Omega_{\alpha_\mu}\Omega'_{\beta_\mu} - \Omega_{\beta_\mu}\Omega'_{\alpha_\mu}) \qquad (n=2). \tag{27}$$

§ 4. Die automorphen Formen 2. Gattung

1. *Von jetzt ab wird bis zum Schluß n als gerade vorausgesetzt:* $n = 2f$. Das Hauptziel dieses Paragraphen ist eine Übersicht über sämtliche automorphen Formen 2. Gattung. Wir brauchen dazu den nachstehenden Hilfssatz, der aus einem allgemeineren Satze von A. WEIL [6], [7] gefolgert werden kann. Spezialfälle des Satzes von WEIL wurden übrigens später von O. TEICHMÜLLER ($n = 2$) und H. PETERSSON [5] (τ eine Grenzkreisuniformisierende) wiederentdeckt.

Es sei $\varphi(\tau)$ *eine automorphe Form* $(-n)$*-ten Grades und 1. oder 2. Gattung. Für alle automorphen Formen 1. Gattung* $\psi(\tau)$ *dieses Grades gelte* $I(\varphi, \psi) = 0$. *Dann ist* $\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varphi_1(\tau)$ *mit einer automorphen Form* $\varphi_0(\tau)$ *von 1. Gattung und der* $(n-1)$*-fachen Ableitung* $\varphi_1(\tau)$ *einer automorphen Form* $\Phi_1(\tau)$ *vom Grade* $n-2$.

Wir bringen einen vollständigen Beweis, da wir auf ihn weiter unten Bezug nehmen müssen. Sei $\Phi(\tau)$ das Integral (12) von $\varphi(\tau)$. Es wird eine automorphe Form $\Phi_1(\tau)$ des Grades $n-2$ gesucht, derart daß

$$\Phi_0(\tau) = \Phi(\tau) - \Phi_1(\tau) \tag{28}$$

höchstens an einer (von den Ecken $\mathfrak{e}_\lambda$ und Spitzen $\mathfrak{s}_\nu$ verschiedenen) Stelle singulär ist.

Zu einer solchen Form $\Phi_1(\tau)$ gehört ein Divisor $\mathfrak{F}$, der durch einen gegebenen Primdivisor $\mathfrak{p}$ ebensooft teilbar ist wie $\Phi_1(\tau)\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^{f-1}$, wo z eine lokale Uniformisierende zu $\mathfrak{p}$ ist; $\mathfrak{F}$ gehört der $(1-f)$-ten Potenz der kanonischen Klasse W an. Nach § 1, Nr. 1 ist $\frac{dz}{d\tau}$ durch ein gewöhnliches $\mathfrak{p}$ gar nicht teilbar, durch die $\mathfrak{s}_\nu$ genau einmal, und durch die $\mathfrak{e}_\lambda$ genau $\left(1 - \frac{1}{n_\lambda}\right)$-mal. Hat nun $\Phi_1(\tau)$ Pole der Ordnungen m_μ in den Punkten $\mathfrak{q}_\mu$, so ist der Divisor $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cdot \prod_\mu \mathfrak{q}_\mu^{-m_\mu} \cdot \prod_{\nu=1}^{h} \mathfrak{s}_\nu^{f-1} \cdot \prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{e}_\lambda^{-\left[\left(\frac{1}{n_\lambda}-1\right)(f-1)\right]}$$

mit einem ganzen Divisor $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{F}$ zur Klasse W^{1-f} gehört, ist der Grad von $\mathfrak{G}$

$$\sum_\mu m_\mu - h(f-1) - \sum_{\lambda=1}^{k}\left(f - 1 - \left[\frac{f-1}{n_\lambda}\right]\right) - 2(f-1)(g-1)$$

und die Dimension der Klasse von $\mathfrak{G}$ nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\dim \mathfrak{G} = \sum_\mu m_\mu - (2f-1)(g-1) - h(f-1) - \sum_{\lambda=1}^{k}\left(f - 1 - \left[\frac{f-1}{n_\lambda}\right]\right) + \dim \frac{W}{\mathfrak{G}},$$

wo W die kanonische Klasse bezeichnet.

Diese Dimension ist >0, wenn $\sum m_\mu > G_n$, wie ein Vergleich mit der Formel (11) lehrt. Unter dieser Voraussetzung gibt es also eine automorphe

Form $\Phi_1(\tau)$ $(n-2)$-ten Grades, die überall holomorph bis auf Pole höchstens m_μ-ter Ordnung in den Punkten $\mathfrak{q}_\mu$ ist.

Wir müssen speziell die Existenz einer Form $\Phi_1(\tau)$ nachweisen, die in einem gegebenen Punkt $\mathfrak{q}$ einen Pol genau m-ter Ordnung und in einem weiteren Punkt $\mathfrak{q}_0$, über den noch zu verfügen ist, einen Pol höchstens G_n-ter Ordnung hat. Damit $\Phi_1(\tau)$ diese Eigenschaft hat, muß der Divisor $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{q}$ teilerfremd sein. Einen solchen Divisor $\mathfrak{G}$ gibt es dann und nur dann, wenn die Dimension der Klasse von $\mathfrak{G}\mathfrak{q}^{-1}$ um 1 kleiner ist als die von $\mathfrak{G}$. Nach dem Riemann-Rochschen Satze ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$\dim \mathfrak{G} = m + \dim W\mathfrak{G}^{-1}, \qquad \dim \mathfrak{G}\mathfrak{q}^{-1} = m - 1 + \dim W\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{q}.$$

Die Klasse von $W\mathfrak{G}^{-1}$ ist die von $W^l\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{q}_0^{-G_n}\mathfrak{q}^{-m}$:

$$W\mathfrak{G}^{-1} \sim W^l\mathfrak{P}\mathfrak{q}_0^{-G_n}\mathfrak{q}^{-m}, \qquad \mathfrak{P} = \prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{E}_\nu^{l-1} \prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{e}_\lambda^{-\left[\left(\frac{1}{n_\lambda}-1\right)(l-1)\right]}.$$

Wegen (10) hat $\mathfrak{P}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, Nr. 3.

Wir behaupten nun, daß für fast alle $\mathfrak{q}_0$ die Dimension der Klasse $W\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{q}^m$ und daher erst recht die Dimensionen der Klassen $W\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{q}$ und $W\mathfrak{G}^{-1}$ gleich 0 sind, woraus $\dim \mathfrak{G} = \dim \mathfrak{G}\mathfrak{q}^{-1} + 1$ und die Existenz der Form $\Phi_1(\tau)$ folgen würde.

Ist $\dim W\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{q}^m > 0$, so gibt es einen ganzen Divisor $\mathfrak{h} \sim W^l\mathfrak{P}\mathfrak{q}_0^{-G_n}$. Dann ist $\mathfrak{h}\mathfrak{q}_0^{G_n}$ ein in der Klasse $W^l\mathfrak{P}$ gelegener ganzer und durch $\mathfrak{q}_0^{G_n}$ teilbarer Divisor. Zu ihm gehört nach § 1, Nr. 3 eine überall holomorphe automorphe Spitzenform $\chi_1(\tau)$ des Grades $-n$, die in $\mathfrak{q}_0$ von der Ordnung G_n verschwindet. Wir ergänzen nun $\chi_1(\tau)$ zu einer Basis $\chi_i(\tau)$ des Moduls aller Spitzenformen dieses Grades und bilden die Determinante

$$D(\tau) = \begin{vmatrix} \chi_1(\tau) & \frac{d}{d\tau}\chi_1(\tau) & \cdots & \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{G_n-1}\chi_1(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_{G_n}(\tau) & \frac{d}{d\tau}\chi_{G_n}(\tau) & \cdots & \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{G_n-1}\chi_{G_n}(\tau) \end{vmatrix}.$$

Dieses ist offenbar eine nicht identisch verschwindende automorphe Form des Grades $-\frac{G_n(G_n+2n-1)}{2}$. Da $\chi_1(\tau)$ in $\mathfrak{q}_0$ von der Ordnung G_n verschwinden sollte, ist auch $D(\tau) = 0$ in $\mathfrak{q}_0$. Das ist aber nur für endlich viele Punkte $\mathfrak{q}_0$ möglich.

Wir halten noch ein Nebenergebnis fest. Ist $D(\tau) \neq 0$ in $\mathfrak{q}_0$, und gelten in einem $\mathfrak{q}_0$ entsprechenden Punkte τ_0 der τ-Ebene die Reihenentwicklungen

$$\chi_i(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\nu}(\tau - \tau_0)^\nu,$$

so ist die Determinante

$$|c_{i\nu}| = \frac{1}{1!\,2!\ldots(G_n-1)!} D(\tau_0) \qquad (i = 1, \ldots, G_n;\ \nu = 0, 1, \ldots, G_n - 1).$$

Mit der zu $(c_{i\nu})$ reziproken Matrix $(c'_{i\nu})$ setze man $\varphi_i(\tau) = \sum_\nu c'_{i\nu}\chi_\nu(\tau)$. Diese Funktionen bilden dann eine Basis des Moduls der holomorphen Spitzenformen mit der Eigenschaft, daß $\varphi_i(\tau)$ in $\mathfrak{q}_0$ genau von der Ordnung $i-1$ verschwindet, $i=1, \ldots, G_n$. Von dieser Basis wird noch Gebrauch gemacht werden.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zu dem eigentlichen Beweis des Hilfssatzes. Das Integral $\Phi(\tau)$ habe Pole m_μ-ter Ordnung in $\mathfrak{q}_\mu$ $(\mu=1, 2, \ldots)$. Man nehme einen weiteren Punkt $\mathfrak{q}_0 \neq \mathfrak{q}_\mu, \mathfrak{s}_\nu, \mathfrak{e}_\lambda$ hinzu und konstruiere automorphe Formen $\Phi_{\mu i}(\tau)$ $(\mu=1, 2, \ldots;\ i=1, 2, \ldots, m_\mu)$ mit einem Pol der Ordnung i in $\mathfrak{q}_\mu$ und einem Pol einer Ordnung $\leqq G_n$ in $\mathfrak{q}_0$. Eine passende Linearkombination $\Phi_1(\tau)$ der $\Phi_{\mu i}(\tau)$ erlaubt dann, die Pole von $\Phi(\tau)$ zu kompensieren, derart, daß die Differenz (28) überall bis möglicherweise auf die Stelle $\mathfrak{q}_0$ holomorph ist, wo ein Pol der Ordnung $\leqq G_n$ liegen darf.

Nun wird von der Voraussetzung $I(\varphi, \psi)=0$ für alle automorphen Formen $\psi(\tau)$ 1. Gattung Gebrauch gemacht. Für $\psi(\tau)$ werden die soeben konstruierten Formen $\varphi_i(\tau)$ eingesetzt. Aus der Voraussetzung folgt wegen § 3, Nr. 2:

$$\int_{\mathfrak{R}} \Phi_0(\tau)\,\varphi_i(\tau)\,d\tau = 0.$$

Der Integrand hat als einzige Singularität einen Pol der Ordnung $\leqq G_n - i + 1$ in $\mathfrak{q}_0$, und dessen Residuum ist 0. Da dieses für alle $i=1, 2, \ldots, G_n$ gilt, muß $\Phi_0(\tau)$ auch in $\mathfrak{q}_0$ holomorph sein, und der Hilfssatz ist bewiesen.

2. *Es sei n gerade. Zu einer Basis $\varphi_i(\tau)$ $(i=1, \ldots, G_n)$ des Moduls der automorphen Formen $(-n)$-ten Grades und 1. Gattung gibt es ebenso viele automorphe Formen $\psi_i(\tau)$ 2. Gattung derart, daß*

$$I(\varphi_i, \psi_k) = \begin{cases} 1 \text{ für } i=k, \\ 0 \text{ für } i \neq k, \end{cases} \qquad I(\psi_i, \psi_k) = 0 \tag{29}$$

ist. Jede automorphe Form $\varphi(\tau)$ 1. oder 2. Gattung läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{G_n} p_i\varphi_i(\tau) + \sum_{i=1}^{G_n} q_i\psi_i(\tau) + \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{n-1} \Phi_0(\tau) \tag{30}$$

darstellen, wobei $\Phi_0(\tau)$ eine automorphe Form des Grades $n-2$ ist.

Es genügt offenbar, diese Behauptung für eine bestimmte Basis $\varphi_i(\tau)$ zu beweisen. Wir nehmen eine solche, für die $\varphi_i(\tau)$ an einer Stelle $\mathfrak{q}_0 \neq \mathfrak{s}_\nu, \mathfrak{e}_\lambda$ genau von der Ordnung $i-1$ verschwindet (s. Nr. 1). Unter Benutzung des Riemann-Rochschen Satzes kann man leicht eine automorphe Spitzenform $\chi_N(\tau)$ konstruieren (s. dazu § 1, Nr. 3), welche überall holomorph bis auf einen Pol N-ter Ordnung in $\mathfrak{q}_0$ ist. Aus $\chi_1(\tau), \ldots, \chi_N(\tau)$ läßt sich eine automorphe Spitzenform $\psi'_N(\tau)$ zusammensetzen, deren Pol in einer $\mathfrak{q}_0$ entsprechenden Stelle τ_0 den Hauptteil $(\tau-\tau_0)^{-N}$ hat. Für $N=n, n+1, \ldots$ sind die $\psi'_N(\tau)$ von 2. Gattung. Setzt man nun $\psi_k(\tau) = \psi'_{n+k}(\tau)$ $(k=1, \ldots, G_n)$, so ist die Determinante $I(\varphi_i, \psi_k) \neq 0$.

Durch geeignete lineare Transformation der $\psi_k(\tau)$ kann man jetzt $I(\varphi_i, \psi_k) = 1$ bzw. 0 erreichen. Wegen § 3, Nr. 2 bleiben diese Gleichungen ungeändert, wenn man die ψ_k durch $\psi_k + \varphi_k'$ mit beliebigen automorphen Formen $\varphi_k' = \sum_i c_{ki} \varphi_i$ ersetzt. Es ist

$$I(\psi_i + \varphi_i', \psi_k + \varphi_k') = I(\psi_i, \psi_k) + I(\psi_i, \varphi_k') + I(\varphi_i', \psi_k) = I(\psi_i, \psi_k) + c_{ik} - c_{ki}.$$

Wegen (26) lassen sich die c_{ik} so bestimmen, daß dies gleich 0 wird. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Jetzt sei $\varphi(\tau)$ eine beliebige automorphe Form 1. oder 2. Gattung. Man bilde

$$\varphi_0'(\tau) = \varphi(\tau) + \sum_{i=1}^{G_n} I(\varphi, \varphi_i)\, \psi_i(\tau).$$

Wegen (29) ist $I(\varphi_0', \varphi_i) = 0$ für alle i und daher nach dem Hilfssatz in Nr. 1 $\varphi_0'(\tau)$ die Summe einer automorphen Form $\sum_i p_i \varphi_i(\tau)$ 1. Gattung und der Ableitung einer automorphen Form $\Phi_0(\tau)$ des Grades $n-2$.

3. *Für ein gerades n entsprechen sich die Cohomologieklassen der Perioden Ω_s und die Klassen automorpher Formen 1. oder 2. Gattung modulo den $(n-1)$-fachen Ableitungen automorpher Formen vom Grade $n-2$ umkehrbar eindeutig. (Oder auch die Cohomologieklassen und die Klassen der Integrale 1. oder 2. Gattung modulo den automorphen Formen des Grades $n-2$.)*

Dieses geht durch Vergleich der Anzahlen (11) und (24) hervor. Nach dem Satz in Nr. 2 ist nämlich die Anzahl der Klassen der automorphen Formen 1. oder 2. Gattung modulo den $(n-1)$-fachen Ableitungen gleich $2G_n$, und diese Zahl ist nach (11) und (24) gleich der Anzahl der linear unabhängigen Cohomologieklassen.

Allerdings ist (24) noch nicht allgemein bewiesen worden, und wir müssen den Rest des Beweises nachholen. Es handelt sich um den Fall $g = h = 0$. Die Potenzprodukte $\varepsilon_1^{h_{11}} \varepsilon_2^{h_{12}} \dots \varepsilon_1^{h_{21}} \varepsilon_2^{h_{22}} \dots$ mit $h_{1\lambda} + h_{2\lambda} + \dots \equiv 0 \bmod n_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots, k)$ bilden eine Untergruppe Γ_0 von Γ von endlichem Index m. Γ_0 enthält kein Element von endlicher Ordnung mehr, da alle Elemente von endlicher Ordnung in Γ die Konjugierten der ε_λ und deren Potenzen sind. Für Γ_0 an Stelle von Γ ist obige Behauptung also richtig. Eine vorgelegte Cohomologieklasse für Γ ist natürlich gleichzeitig eine für Γ_0, und zu dieser existiert also ein Integral $\Phi_0(\tau)$ von 1. oder 2. Gattung, welches den Gln. (13) für alle $\varepsilon_0 \in \Gamma_0$ mit den gegebenen Perioden Ω_{ε_0} genügt.

Es sei nun $\Gamma = \sum_{i=1}^{m} \Gamma_0 \varepsilon_i$ eine Zerlegung in Nebengruppen und

$$\Phi(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_0(\tau)\, [\varepsilon_i]^{n-2}.$$

Für jedes $\varepsilon \in \Gamma$ gibt es dann ein $\varepsilon_0(\varepsilon, i) \in \Gamma_0$ und einen Index $1 \leqq j(\varepsilon, i) \leqq m$ so daß

$$\varepsilon_i \varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon, i)\, \varepsilon_{j(\varepsilon, i)} \tag{31}$$

ist. Nun folgt

$$\Phi(\tau)[\varepsilon]^{n-2} = \sum_{i=1}^{m} \Phi_0(\tau)[\varepsilon_0(\varepsilon,i)]^{n-2}[\varepsilon_{j(\varepsilon,i)}]^{n-2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Phi_0(\tau)[\varepsilon_{j(\varepsilon,i)}]^{n-2} + \sum_{i=1}^{m} \Omega_{\varepsilon_0(\varepsilon,i)}(\tau)[\varepsilon_{j(\varepsilon,i)}]^{n-2}.$$

Offenbar durchläuft $j(\varepsilon,i)$ mit i auch alle Ziffern von 1 bis m. Daher ist

$$\Phi(\tau)[\varepsilon]^{n-2} = \Phi(\tau) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_{\varepsilon_0(\varepsilon,i)}(\tau)[\varepsilon_{j(\varepsilon,i)}]^{n-2}$$

und weiter nach (16)

$$\frac{1}{m}\Phi(\tau)[\varepsilon]^{n-2} = \frac{1}{m}\Phi(\tau) + \Omega_\varepsilon(\tau) + \left(\sum_{i=1}^{m}\Omega_{\varepsilon_i}(\tau)\right)\left([\varepsilon]^{n-2} - [1]^{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\Phi(\tau) + \Omega'_\varepsilon(\tau).$$

$\Omega'_\varepsilon(\tau)$ und $\Omega_\varepsilon(\tau)$ gehören der gleichen Cohomologieklasse an, und $\frac{1}{m}\Phi(\tau)$ ist ein zu dieser gehöriges Integral 1. oder 2. Gattung.

Hiermit ist obiger Satz auch in diesem Falle bewiesen, und die Formel (24) kann man nachträglich aus (11) gewinnen, da man jetzt weiß, daß die Anzahl der linear unabhängigen Cohomologieklassen $R_n = 2G_n$ ist.

§ 5. Korrespondenzen

1. In diesem Paragraphen wird der Begriff und die elementaren Eigenschaften gewisser Korrespondenzen entwickelt (es handelt sich um spezielle irreduzible Korrespondenzen), und zwar vom funktionentheoretischen oder auch vom geometrischen Standpunkt. Die algebraischen Gesichtspunkte der Korrespondenzentheorie interessieren in diesem Zusammenhang weniger.

Es möge eine zweireihige nicht singuläre und nicht zu Γ gehörige Matrix ν_0 existieren, für die $\Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ sowohl in Γ wie in $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ einen endlichen Index hat.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{d} (\Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\,\varepsilon_i, \qquad \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0 = \sum_{i=1}^{d^*} (\Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\,\varepsilon_i^* \tag{32}$$

seien die Entwicklungen in linksseitige Nebengruppen. Zu jedem $\varepsilon \in \Gamma$ und zu jeder Ziffer i zwischen 1 und d gibt es ein Element $\eta(\varepsilon,i) \in \Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ und eine Ziffer $j(\varepsilon,i)$ zwischen 1 und d, so daß

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon = \eta(\varepsilon,i)\,\varepsilon_{j(\varepsilon,i)}, \qquad \eta(\varepsilon,i) \in \Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0 \tag{33}$$

gilt; die Abbildung $i \to j(\varepsilon,i)$ ist eine Permutation der Ziffern 1 bis d. Man bilde noch die Nebengruppen

$$\Gamma\nu_i \quad \text{mit} \quad \nu_i = \nu_0\varepsilon_i, \qquad i = 1,\ldots,d. \tag{34}$$

Wegen (33) permutieren sie sich, wenn man sie von rechts mit einem $\varepsilon \in \Gamma$ multipliziert.

Die Beziehungen zwischen den Gruppen Γ, $\Gamma\cap\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$, $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ lassen eine bedeutungsvolle geometrische Deutung zu. Nach § 1, Nr. 1 ist Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Abbildungen einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche $\mathfrak{T}$ auf sich. Man bilde die Klassen $\Gamma\tau$ von bezüglich Γ äquivalenten Punkten von $\mathfrak{T}$. Diese bilden eine Fläche, welche als der Quotientenraum $\Gamma\backslash\mathfrak{T}$ gedeutet werden kann. Diese Fläche ist mit $\mathfrak{R}$ homöomorph, ja sogar von den Spitzen und Ecken abgesehen mit $\mathfrak{R}$ konform äquivalent. Wir dürfen daher

$$\Gamma\backslash\mathfrak{T}=\mathfrak{R}$$

schreiben.

Der Quotientenraum $(\Gamma\cap\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\backslash\mathfrak{T}=\overline{\mathfrak{R}}$ ist eine d-blättrige Überlagerung von $\mathfrak{R}$, wenn man die Punkte $\overline{P}_i=(\Gamma\cap\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\varepsilon_i\tau$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ als diejenigen erklärt, welche über dem Punkt $P=\Gamma\tau$ von $\mathfrak{R}$ liegen. In gleicher Weise liegen die $\overline{P}_i$ über den Punkten $P_i^*=\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\cdot\overline{P}_i=\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\varepsilon_i\tau$ der Fläche $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\backslash\mathfrak{T}=\mathfrak{R}^*$. Endlich wird durch $\nu_0P^*=\nu_0(\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\tau)=\Gamma\nu_0\tau=P$ jeder Punkt P^* von $\mathfrak{R}^*$ auf einen Punkt P von $\mathfrak{R}$ abgebildet. Die zusammengesetzte Abbildung

$$P\to\{\overline{P}_i,\ldots,\overline{P}_d\}\to\{P_1^*,\ldots,P_d^*\}\to\{P_1,\ldots,P_d\}$$

eines Punktes P von $\mathfrak{R}$ auf eine Punktgruppe P_i von $\mathfrak{R}$ nennt man eine *Korrespondenz von $\mathfrak{R}$ zu sich selber*. Die Abbildungen $P\to P_i$ sind natürlich fast überall konform, ausgenommen sind höchstens die Stellen, wo $\overline{\mathfrak{R}}$ über $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}^*$ verzweigt ist.

Die soeben erklärte Korrespondenz läßt sich als ein linksseitiger Operator schreiben:

$$T(\Gamma\tau)=\left(\sum_{i=1}^{d}\Gamma\nu_i\right)(\Gamma\tau). \tag{35}$$

In der Tat werden jedem Punkt $\varepsilon\tau$ von $\mathfrak{T}$ die Punkte $(\Gamma\cap\nu^{-1}\Gamma\nu)\varepsilon_i\varepsilon\tau$ von $\overline{\mathfrak{R}}$, die Punkte $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\cdot(\Gamma\cap\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\varepsilon_i\varepsilon\tau=\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\varepsilon_i\varepsilon\tau$ von $\mathfrak{R}^*$ und die Punkte $\nu_0\cdot\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\varepsilon_i\varepsilon\tau=\Gamma\nu_0\varepsilon_i\varepsilon\tau=\Gamma\nu_i\varepsilon\tau$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Diese sind von ε unabhängig, so daß man (35) in dem Sinne schreiben kann, daß die Summe als mengentheoretische Vereinigung aufzufassen ist.

Die Schreibweise (35) legt die Definition der *Summe* und des *Produktes von zwei Korrespondenzen* nahe. Es entstehen so weitere Abbildungen eines Punktes von $\mathfrak{R}$ auf Punktgruppen von $\mathfrak{R}$, die allerdings nicht mehr in obiger Weise durch Gruppen $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ erzeugbar zu sein brauchen. Dieses sind Korrespondenzen allgemeinerer Art, die hier nicht weiter interessieren, und auf die wir deshalb auch nicht näher eingehen werden. Es ist jedenfalls klar, daß diese allgemeineren Korrespondenzen einen assoziativen Ring bilden.

2. Man kann die Reihenfolge $\mathfrak{R}\to\overline{\mathfrak{R}}\to\mathfrak{R}^*\to\mathfrak{R}$ der Abbildungen auch umkehren. Dann bildet man zuerst einen Punkt $P=\Gamma\tau$ von $\mathfrak{R}$ durch $\nu_0^{-1}P=\nu_0^{-1}\Gamma\tau=\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\cdot\nu_0^{-1}\tau=P^*$ auf einen Punkt P^* von $\mathfrak{R}^*$ ab. Hierauf sucht man dessen Überlagerungen $\overline{P}_i=(\Gamma\cap\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\varepsilon_i^*\nu_0^{-1}\tau$ $(i=1,\ldots,d^*)$ in $\overline{\mathfrak{R}}$ und schließlich diejenigen Punkte $P_i=\Gamma\overline{P}_i=\Gamma\varepsilon_i^*\nu_0^{-1}\tau$ in $\mathfrak{R}$ auf, über welchen

die $\overline{P}_i$ liegen. Diese Punktgruppe bezeichnet man mit

$$T^*(\Gamma\tau) = \sum_{i=1}^{d^*} \Gamma \varepsilon_i^* \nu_0^{-1} \tau .$$

Transformiert man die zweite Gl. (32) noch mit ν_0, so entsteht

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{d^*} (\Gamma \cap \nu_0 \Gamma \nu_0^{-1}) \eta_j , \tag{36}$$

und T läßt sich schreiben

$$T^*(\Gamma\tau) = \left(\sum_{j=1}^{d^*} \Gamma \nu_j^* \right) (\Gamma\tau) \quad \text{mit } \nu_j^* = \nu_0^{-1} \eta_j . \tag{37}$$

T^* heißt die zu T *adjungierte Korrespondenz*. Offenbar ist

$$T^{**} = T .$$

Es läßt sich sehr leicht zeigen, *daß die Konjugiertenbildung ein Antiautomorphismus im Ring der Korrespondenzen ist.* Wir werden aber hiervon keinen Gebrauch machen und auch den Beweis nicht bringen.

3. *Ein Beispiel* soll das bisher Ausgeführte verdeutlichen. Es sei Γ die Modulgruppe. Dann ist $\mathfrak{T}$ die obere komplexe Halbebene. Spezielle Korrespondenzen sind die *Modularkorrespondenzen* $T = T_p$; sie lassen sich jeder natürlichen Primzahl p zuordnen. Man nehme

$$\nu_0 = \nu_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \nu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nu_{2+i} = \nu_2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad (i = 0, \ldots, p-1).$$

Hier sind die ν_i auch noch auf der linken Seite mit Elementen aus Γ multipliziert worden, was aber ersichtlich auf die Definition (35) keinen Einfluß hat. Modularkorrespondenzen T_N mit quadratfreiem N sind von ähnlicher Natur. Bei nicht quadratfreiem N sind sie bereits additiv aus Korrespondenzen obiger Art zusammengesetzt.

4. Die Korrespondenzen lassen sich auf folgende Art als Operatoren für den Modul der automorphen Formen eines beliebigen Grades m erklären:

$$\varphi(\tau)\, T = \sum_{i=1}^{d} \varphi(\tau)\, [\nu_i]^m . \tag{38}$$

Die rechte Seite ändert sich nicht, wenn man die ν_i links mit irgendwelchen Elementen $\eta \in \Gamma$ multipliziert. Wendet man aber auf $\varphi(\tau)\, T$ den Operator $[\varepsilon]^m$ an, so erkennt man die Invarianz auf Grund von (33). Speziell interessieren hier die Fälle $m = -n$ und $m = n - 2$.

Offensichtlich führt der durch (38) erklärte Operator holomorphe Formen in holomorphe und meromorphe Formen in ebensolche über. Wir behaupten sogar, daß Spitzenformen in Spitzenformen transformiert werden.

Hierzu ist zuerst zu zeigen, daß bei einer Korrespondenz T die Bildpunkte einer Spitze sämtlich wieder Spitzen sind. Nach § 1, Nr. 1 sind die

Spitzen dadurch eindeutig gekennzeichnet, daß sie Fixpunkte solcher Substitutionen $\gamma \in \Gamma$ sind, welche sich auf die Normalform (3) transformieren lassen. Ist $P = \Gamma\tau_0$ eine Spitze und $\gamma\tau_0 = \tau_0$, so sind die Bildpunkte $\overline{P}_i = (\Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0)\,\varepsilon_i\tau_0$. Alle Punkte $\eta\varepsilon_i\tau_0$ mit $\eta \in \Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ sind Fixpunkte der Substitutionen $\bar{\gamma} = \eta\varepsilon_i\gamma^l\varepsilon_i^{-1}\eta^{-1}$, wobei die Exponenten l so gewählt werden müssen, daß $\bar{\gamma} \in \Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ ist. Wegen der Endlichkeit des Index $[\Gamma : \Gamma \cap \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0]$ gibt es solche Exponenten l. Die $\bar{\gamma}$ lassen sich auf die Normalform (3) transformieren, und daher sind die Punkte $\overline{P}_i$ Spitzen von $\overline{\mathfrak{R}}$. Die Punkte $P_i^* = \nu_0^{-1}\Gamma\nu_0\overline{P}_i$ sind wegen dieser Eigenschaft auch Spitzen von $\mathfrak{R}^*$. Endlich bildet $\nu_0 P^* = P$ gleichzeitig einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^*$ von $\nu_0^{-1}\Gamma\nu_0$ in $\mathfrak{T}$ auf einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Γ in $\mathfrak{R}$ überall konform ab; dabei müssen Spitzen in Spitzen übergehen.

Auf Grund von (38) kann man leicht schließen, daß eine in allen Spitzen verschwindende Funktion $\varphi(\tau)$ diese Eigenschaft bei Anwendung des Operators T behält. Es gilt daher:

Der Operator (38) *transformiert automorphe Formen 1. und 2. Gattung in automorphe Formen der gleichen Gattung.*

Da die automorphen Formen der 1. Gattung einen Modul endlichen Ranges bilden, erhält man so eine Darstellung des Korrespondenzenringes durch Matrizen eines endlichen Ranges. Wir stellen uns die Aufgabe, deren Spur zu berechnen; sie wird in § 6 gelöst.

5. Jetzt soll das Verhalten des Operators (38) bei $(n-1)$-facher unbestimmter Integration studiert werden. In der Bezeichnungsweise von § 1 ist

$$\Phi'(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\left(\varphi(\sigma)\,T\right)d\sigma$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{d}\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\varphi(\nu_i\sigma)\left(\frac{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}{(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}d\nu_i\sigma\,.$$

Man benutzt hier die Identität

$$\nu_i\tau - \nu_i\sigma = (\tau-\sigma)\,\frac{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}{(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})(c_{\nu_i}\sigma+d_{\nu_i})}$$

und erhält dann

$$\Phi'(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{d}\int_{\tau_0}^{\tau}(\nu_i\tau-\nu_i\sigma)^{n-2}\varphi(\nu_i\sigma)\,d\nu_i\sigma\left(\frac{(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})^2}{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Substituiert man in den einzelnen Integralen $\nu_i\sigma = \sigma_i$, schreibt aber wieder σ an Stelle von σ_i, so wird dies

$$\Phi'(\tau) = \sum_{i=1}^{d}\Phi(\tau)\,[\nu_i]^{n-2} + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{d}\int_{\nu_i\tau_0}^{\tau_0}\left(\frac{(a_{\nu_i}\tau+b_{\nu_i})-\sigma(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})^2}{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}\right)^{\frac{n-2}{2}}\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{d}\Phi(\tau)\,[\nu_i]^{n-2} + \Theta(\tau)\,.$$

Definiert man also T als einen Operator im Modul der Integrale 1. oder 2. Gattung durch

$$\Phi(\tau)\,T = \sum_{i=1}^{d} \Phi(\tau)\,[v_i]^{n-2}, \tag{39}$$

so erweisen sich die Anwendung von T und die $(n-1)$-fache Integration bzw. Differentiation als vertauschbare Operatoren, abgesehen von den Integrationskonstanten.

Natürlich ist mit (39) T auch als ein Operator im Raume der Cohomologieklassen erklärt. Die Perioden von $\Phi(\tau)\,T$ sind

$$\Omega_\varepsilon T = \Omega'_\varepsilon = \sum_{i=1}^{d} \Omega_{\eta(\varepsilon,i)}\,[v_{j(\varepsilon,i)}]^{n-2}, \tag{40}$$

wo $\eta(\varepsilon, i), j(\varepsilon, i), v_i$ durch (33) und (34) erklärt sind. Auf eine merkwürdige Konsequenz dieses Sachverhalts werden wir in § 7 hinweisen.

6. Zum Schluß dieses Paragraphen soll das Verhalten der Bilinearform $I(\varphi, \psi)$ bei Anwendung der Korrespondenz T studiert werden. Das Ergebnis sei an den Anfang gestellt: *Für zwei automorphe Formen 1. oder 2. Gattung gilt*

$$I(\varphi, \psi T) = I(\varphi T^*, \psi), \tag{41}$$

wo T^* die zu T konjugierte Korrespondenz ist.

Zum Beweis deute man die irgendwie aufgeschnittene Fläche $\mathfrak{R}$ als einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ der Gruppe Γ in $\mathfrak{T}$. Mit einem Akzent soll, wie in der Topologie üblich, der Rand bezeichnet werden: $\mathfrak{F}'$ ist also der Rand von $\mathfrak{F}$. Es ist

$$I(\varphi, \psi T) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathfrak{F}'} \Phi(\tau)\,\psi(v_j\tau) \left(\frac{a_{v_j} d_{v_j} - b_{v_j} c_{v_j}}{(c_{v_j}\tau + d_{v_j})^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} d v_j \tau .$$

Wie in § 3 ausgeführt wurde, hängt $I(\varphi, \psi T)$ weder von der Integrationskonstanten des Integrals $\Phi(\tau)$ von $\varphi(\tau)$ noch von der Wahl von $\mathfrak{F}$ ab. Man setze nun $v_j = v_0 \varepsilon_j$ gemäß (34) und substituiere in den einzelnen Integralen $\varepsilon_j \tau = \tau_j$, schreibe aber wieder τ an Stelle von τ_j. Das ergibt wegen (13) und

$$\frac{a_{v_j} d_{v_j} - b_{v_j} c_{v_j}}{(c_{v_j}\tau + d_{v_j})^2} = \frac{a_{v_0} d_{v_0} - b_{v_0} c_{v_0}}{(c_{v_0}\tau + d_{v_0})^2}\,[\varepsilon_j]^{-2}, \qquad \Omega_{\varepsilon_j^{-1}}[\varepsilon_j]^{n-2} = -\Omega_{\varepsilon_j};$$

$$I(\varphi, \psi T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \varepsilon_j \mathfrak{F}'} \Phi(\tau)\,\psi(\tau)\,[v_0]^{-n}\,d v_0 \tau - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{d} \int_{\varepsilon_j \mathfrak{F}'} \Omega_{\varepsilon_j}(\tau)\,\psi(\tau)\,[v_0]^{-n}\,d\tau .$$

Die letzteren Integrale kann man durch $(n-1)$-fache Teilintegration umformen. Sie fallen sämtlich gleich 0 aus, da die $\Omega_{\varepsilon_j}(\tau)$ Polynome $(n-2)$-ten Grades sind und das $(n-1)$-fache unbestimmte Integral von $\psi(\tau)\,[v_0]^{-n}$ wegunabhängig ist, denn $\psi(\tau)$ wurde ja als eine automorphe Form 1. oder 2. Gattung vorausgesetzt. Also gilt

$$I(\varphi, \psi T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma \varepsilon_j \mathfrak{F}'} \Phi(\tau)\,\psi(\tau)\,[v_0]^{-n}\,d v_0 \tau .$$

Eine erneute Variablensubstitution $\nu_0 \tau = \sigma$ liefert

$$I(\varphi, \psi T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu_0 \cdot \sum \varepsilon_j \mathfrak{F}} \Phi(\tau) [\nu_0^{-1}]^{n-2} \psi(\tau) \, d\tau. \tag{42}$$

Jetzt ist $\sum \varepsilon_i \mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich der Gruppe $\Gamma \cap \nu_0^{-1} \Gamma \nu_0$ und folglich $\nu_0 \cdot \sum \varepsilon_j \mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich der Gruppe $\nu_0 (\Gamma \cap \nu_0^{-1} \Gamma \nu_0) \nu_0^{-1} = \Gamma \cap \nu_0 \Gamma \nu_0^{-1}$. Ferner ist $\Phi(\tau) [\nu_0^{-1}]^{n-2}$ ein Integral 1. oder 2. Gattung für die Gruppe $\nu_0 \Gamma \nu_0^{-1}$. Daher ist (42) die Bilinearform $\bar{I}(\varphi [\nu_0^{-1}]^{-n}, \psi)$ bezüglich der Gruppe $\bar{\Gamma} = \Gamma \cap \nu_0 \Gamma \nu_0^{-1}$. Ein anderer Fundamentalbereich derselben Gruppe ist aber wegen (36) $\sum_{j=1}^{d^*} \eta_j \mathfrak{F}$. Daher kann man für (42) auch schreiben:

$$I(\varphi, \psi T) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{d^*} \int_{\eta_j \mathfrak{F}} \Phi(\tau) [\nu_0^{-1}]^{n-2} \psi(\tau) \, d\tau.$$

Hier substituiere man in den einzelnen Integralen $\tau = \eta_j \tau_j$, schreibe aber wieder τ an Stelle von τ_j und erhält

$$I(\varphi, \psi T) = \sum_{j=1}^{d^*} \int_{\mathfrak{F}} \Phi(\tau) [\nu_0^{-1} \eta_j]^{n-2} \psi(\tau) \, d\tau.$$

Das ist aber wegen (37) und wegen der Vertauschbarkeit von Integration und Anwendung des Operators T^* gleich $I(\varphi T^*, \psi)$, wie behauptet wurde.

§ 6. Die Spur einer Korrespondenz

1. Wir greifen jetzt die in § 5, Nr. 4 gestellte Aufgabe an, die Spur der Darstellung einer Korrespondenz T in bezug auf den Modul der automorphen Formen 1. Gattung des Grades $-n$ zu bestimmen. Es sei $\varphi_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, G_n)$ eine Basis dieses Moduls und

$$\varphi_i(\tau) \, T = \sum_{j=1}^{G_n} m_{ij} \varphi_j(\tau), \tag{43}$$

dann ist also

$$s_n(T) = \sum_{i=1}^{G_n} m_{ii} \tag{44}$$

zu berechnen.

Seien $\psi_i(\tau)$ die zu den $\varphi_i(\tau)$ gehörigen automorphen Formen 2. Gattung der Art, daß die Gln. (29) bestehen, und $\Psi_i(\tau)$ deren Integrale. Mit diesen bilde man die Funktion

$$K_1(\tau, \sigma) = \sum_{i=1}^{G_n} \varphi_i(\tau) \Psi_i(\sigma). \tag{45}$$

Gemäß § 4, Nr. 1 wird hierzu eine automorphe Form $K_0(\sigma) = K_0(\tau, \sigma)$ des Grades $n-2$ in σ bestimmt, welche Pole an den singulären Stellen der $\Psi_i(\tau)$ mit denselben Hauptteilen wie $K_1(\tau, \sigma)$ besitzt und außer an diesen Stellen höchstens noch an der Stelle $\sigma = \tau$ (und den hierzu bezüglich Γ äquivalenten)

singulär wird; und zwar soll dort höchstens ein Pol der Ordnung G_n liegen. Mit diesen Funktionen wird

$$K(\tau,\sigma) = -K_1(\tau,\sigma) + K_0(\tau,\sigma) \tag{46}$$

gebildet. $K(\tau,\sigma)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1) *Für jede automorphe Form $\varphi(\tau)$ von 1. Gattung gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} K(\tau,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = \varphi(\tau). \tag{47}$$

2) *$K(\tau,\sigma)$ ist ein Integral 2. Gattung in σ, welches überall bis auf die Stelle $\sigma=\tau$ (und die hierzu bezüglich Γ äquivalenten Stellen) holomorph ist. In $\sigma=\tau$ liegt ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum* 1:

$$K(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sigma-\tau} + \cdots. \tag{48}$$

Die Gl. (47) folgt aus dem Ansatz (45), (46) von $K(\tau,\sigma)$, sowie aus § 3, Nr. 2. Die Holomorphie von $K(\tau,\sigma)$ bis auf die Stelle $\sigma=\tau$ ist ebenfalls eine Folge des Ansatzes. Um (48) zu beweisen, gehe man davon aus, daß $K(\tau,\sigma)$ höchstens einen Pol G_n-ter Ordnung haben kann. Es ist also

$$K(\tau,\sigma) = \sum_{\mu=1}^{G_n} \frac{c_\mu}{(\sigma-\tau)^\mu} + \cdots.$$

Aus (47) folgt jetzt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}} K(\tau,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = \varphi(\tau) = \sum_{\mu=1}^{G_n} \frac{c_\mu}{(\mu-1)!}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{\mu-1}\varphi(\tau).$$

Diese Gleichung kann aber für alle G_n Formen $\varphi(\tau)$ 1. Gattung nur dann bestehen, wenn alle $c_\mu=0$ sind bis auf $c_1=1$.

2. Zur Berechnung der Spur (44) braucht man noch den folgenden Hilfssatz: *$K_0(\tau,\sigma)$ ist in τ eine automorphe Form des Grades $-n$, wenn $n>2$ ist.*

Zum Beweise geht man davon aus, daß $K(\tau,\sigma)$ konstruktionsgemäß nicht nur in $\sigma=\tau$, sondern auch in allen hierzu bezüglich Γ äquivalenten Punkten Pole besitzt. Ferner ist $K(\tau,\sigma)$ in σ ein Integral 2. Gattung. Folglich erhält man den Hauptteil der Singularität von $K(\tau,\sigma)$ in $\sigma=\varepsilon\tau$ für ein $\varepsilon\in\Gamma$ durch Anwendung des Operators $[\varepsilon^{-1}]^{n-2}$ bezüglich der Variablen σ auf die Entwicklung (48):

$$K(\tau,\sigma)\,[\varepsilon^{-1}]_\sigma^{n-2} = \frac{1}{(a_{\varepsilon^{-1}}\sigma+b_{\varepsilon^{-1}})}\,\frac{1}{-\tau\,(c_{\varepsilon^{-1}}\sigma+d_{\varepsilon^{-1}})}\,\frac{(c_{\varepsilon^{-1}}\sigma+d_{\varepsilon^{-1}})^{n-1}}{(a_{\varepsilon^{-1}}d_{\varepsilon^{-1}}-b_{\varepsilon^{-1}}c_{\varepsilon^{-1}})^{\frac{n-2}{2}}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\sigma-\varepsilon\tau}\,\frac{(a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}{(c_\varepsilon\tau+d_\varepsilon)^n} + \cdots,$$

die Punkte bedeuten jedesmal eine Potenzreihe in σ. Dann ist in verständlicher Abkürzung $K(\tau,\sigma)\,[\varepsilon^{-1}]_\sigma^{n-2} - K(\tau,\sigma)\,[\varepsilon]_\tau^{-n}$ als Funktion von σ an der

Stelle $\sigma = \tau$ und folglich überall holomorph. Andererseits folgt aus der Konstruktion

$$K(\tau, \sigma)\,[\varepsilon^{-1}]_\sigma^{n-2} = K(\tau, \sigma) - \sum_{i=1}^{G_n} \varphi_i(\tau)\,\Omega_i'(\sigma),$$

wo die $\Omega_i'(\sigma)$ die Perioden der $\Psi_i(\sigma)$ sind. Mithin ist wegen (46):

$$K_0(\tau, \sigma) - K_0(\tau, \sigma)\,[\varepsilon]_\tau^{-n}$$

eine holomorphe automorphe Form in σ des Grades $n-2$. Eine solche muß bekanntlich identisch 0 sein, da $n > 2$ vorausgesetzt wurde. Das war aber die Behauptung.

3. Wir halten bis zum Schluß von Nr. 6 an der Voraussetzung $n > 2$ fest. Für eine Korrespondenz T folgt aus (43), (44)

$$s_n(T) = \sum_{j=1}^{G_n} I(\varphi_j T, \psi_j) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{G_n} \int_{\mathfrak{R}} (\varphi_j(\tau)\,T)\,\Psi_j(\tau)\,d\tau, \tag{49}$$

das Integral im Sinne von § 3, Nr. 1 verstanden.

Nun war in Nr. 2 bewiesen worden, daß $K_0(\tau, \sigma)$ in τ und σ eine automorphe Form der Grade $-n$ bzw. $n-2$ ist. Dasselbe gilt dann auch für

$$K_0(\tau, \sigma)\,T_\tau = \sum_{i=1}^{d} K_0(v_i \tau, \sigma)\,\frac{(a_{v_i} d_{v_i} - b_{v_i} c_{v_i})^{\frac{n}{2}}}{(c_{v_i}\tau + d_{v_i})^n},$$

und daher ist

$$K_{0T}(\tau) = [K_0(\tau, \sigma)\,T_\tau]_{\sigma=\tau}$$

eine automorphe Form des Grades -2. Die Residuensumme des Differentials $K_{0T}(\tau)\,d\tau$ ist gleich 0:

$$\int_{\mathfrak{R}} K_{0T}(\tau)\,d\tau = 0. \tag{50}$$

Aus (45), (46) einerseits, (49) und (50) andererseits ergibt sich nun

$$s_n(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} K_T(\tau)\,d\tau \quad \text{mit} \quad K_T(\tau) = \sum_{i=1}^{d} K(v_i \tau, \tau)\,\frac{(a_{v_i} d_{v_i} - b_{v_i} c_{v_i})^{\frac{n}{2}}}{(c_{v_i}\tau + d_{v_i})^n}. \tag{51}$$

Das Integral ist wie bisher im Sinne von § 3 als die Summe der Residuen des Integranden, einschließlich der Ecken und Spitzen zu verstehen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß (51) auch dann gilt, wenn $G_n = 0$ ist, wenn also keine automorphen Formen 1. oder 2. Gattung existieren. Dann ist einerseits $s_n(T) = 0$. Andererseits gibt es eine automorphe Form $K(\tau, \sigma) = K_0(\tau, \sigma)$ in σ vom Grade $n-2$, welche in $\sigma = \tau$, und auch nur hier, einen Pol mit dem Hauptteil (48) hat. $K(\tau, \sigma)$ ist in τ eine automorphe Form des Grades $-n$, und die wie oben gebildete Funktion $K_T(\tau)$ ist eine automorphe Form des Grades -2, ihr Integral (51) ist daher 0.

4. Es bleibt die Auswertung von (51) übrig. $K_T(\tau)$ hat an den Stellen $\tau = \tau_0$ Pole 1. Ordnung, für welche $v_i \tau_0 = \eta^{-1} \tau_0$ für irgendeinen Index i aus

der Reihe $1, \dots, d$ und irgendein $\eta \in \Gamma$ ist. Das heißt, τ_0 ist ein *Fixpunkt* von $\eta \nu_i$. Mit irgendeinem $\varepsilon \in \Gamma$ ist $\varepsilon^{-1}\tau_0$ Fixpunkt von $\varepsilon^{-1}\eta\nu_i\varepsilon$, d.h. also: zu konjugierten Substitutionen gehören äquivalente Fixpunkte. Alle in dieser Weise auftretenden Fixpunkte heißen die *Fixpunkte der Korrespondenz*. Faßt man sie in Klassen $\Gamma\tau_0$ zusammen und deutet diese als die Punkte von $\mathfrak{R}$ (§ 1, Nr. 1), so gibt es natürlich nur endlich viele Fixpunkte von T in $\mathfrak{R}$.

Sei nun $\nu = \eta\nu_i$ und $\nu\tau_0 = \tau_0$ ein Fixpunkt von T. Zunächst werde angenommen, daß τ_0 nicht eine Ecke oder Spitze ist. Der Pol von $K_T(\tau)$ in $\tau = \tau_0$ hat dann den Hauptteil

$$(52) \qquad \frac{1}{\tau - \nu\tau} \frac{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n}{2}}}{(c_\nu \tau + d_\nu)^n} + \cdots = \frac{1}{\tau - \tau_0} \frac{1}{1 - \frac{a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu}{(c_\nu \tau_0 + d_\nu)^2}} \frac{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n}{2}}}{(c_\nu \tau_0 + d_\nu)^n}.$$

Das Residuum kann folgendermaßen gedeutet werden: Man bezeichne die beiden Eigenwerte der Matrix ν mit

$$(53) \qquad \begin{cases} \varrho_\nu = \dfrac{a_\nu + d_\nu + \sqrt{(a_\nu + d_\nu)^2 - 4(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)}}{2} = c_\nu \tau_0 + d_\nu, \\ \varrho_\nu^* = \dfrac{a_\nu + d_\nu - \sqrt{(a_\nu + d_\nu)^2 - 4(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)}}{2} = \dfrac{a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu}{\varrho_\nu}. \end{cases}$$

In dieser Bezeichnung ist das Residuum von $K_T(\tau)$ an dieser Stelle

$$(54) \qquad \operatorname{Res}(\nu) = \frac{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n}{2}}}{\varrho_\nu^{n-1}} \frac{1}{\varrho_\nu - \varrho_\nu^*} = \frac{1}{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\varrho_\nu^{*n-1}}{\varrho_\nu - \varrho_\nu^*}.$$

Zum richtigen Verständnis von (54) ist eine Unterscheidung der beiden Eigenwerte (53) von ν erforderlich. Zunächst sieht man aus (54), daß $\varrho_\nu \neq \varrho_\nu^*$ ist. Das Vorzeichen der Quadratwurzel in (53) ist so zu nehmen, daß $\tau_0 = \dfrac{\varrho_\nu - d_\nu}{c_\nu}$ im Inneren des Bereichs $\mathfrak{T}$ liegt, auf den die Funktion τ die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ abbildet. Wenn τ_0 für beide Vorzeichen der Quadratwurzel in $\mathfrak{T}$ liegt, gehören zu diesem ν zwei Pole an den Stellen τ_0, τ_0^*, es sei denn, daß $\tau_0^* = \varepsilon\tau_0$ mit einem $\varepsilon \in \Gamma$ gilt.

Ist τ_0 eine Ecke $\mathfrak{c}_\lambda$, so behält das Residuum von $R_T(\tau)$ als Funktion in τ den Wert (54). Da aber die lokale Uniformisierende $z = (\tau - \tau_0)^{n_\lambda}$ ist, gilt $z^{-1}dz = n_\lambda(\tau - \tau_0)^{-1}d(\tau - \tau_0)$, und es gilt hier bis auf ein in τ_0 holomorphes Differential

$$K_T(\tau)\, d\tau = \operatorname{Res}(\nu) \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} = \frac{\operatorname{Res}(\nu)}{n_\lambda} \frac{dz}{z}.$$

Man muß daher (54) durch n_λ dividieren, um den entsprechenden Beitrag zu (51) zu erhalten.

Endlich sei der Fixpunkt von ν eine Spitze $\mathfrak{s}$. Wir denken uns diesen Punkt nach $\tau_0 = i\infty$ verlegt, er ist dann gleichzeitig der Fixpunkt des Elements $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$, welches wir gemäß § 1 in eine bequeme Normalform

transformiert annehmen. Es muß dann

$$\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ 0 & d_\nu \end{pmatrix} \tag{55}$$

gelten, wobei $a_\nu d_\nu$ reell und >0 ist. Wegen

$$\nu^{-1}\gamma\nu = \begin{pmatrix} 1 & a_\nu^{-1}d_\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

können die Gruppenindizes $[\Gamma:\Gamma\cap\nu^{-1}\Gamma\nu]$ und $[\nu^{-1}\Gamma\nu:\Gamma\cap\nu^{-1}\Gamma\nu]$ nur dann endlich sein, wenn $a_\nu^{-1}d_\nu$ rational ist. Wir dürfen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß a_ν und d_ν teilerfremde natürliche Zahlen sind.

Wir brauchen ferner einige der Elemente (34), nämlich

$$\nu_i = \nu\gamma^{i-1} = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu + a_\nu(i-1) \\ 0 & d_\nu \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, d_\nu. \tag{56}$$

Für $i > d_\nu$ ist $\nu\gamma^{i-1}$ in der Form $\gamma^j\nu_k$ für gewisse j und k ausdrückbar. Die übrigen ν_i in (34), für welche ε_i nicht eine Potenz von γ ist, haben nicht mehr denselben Fixpunkt $\hat{s}$ und interessieren deshalb in diesem Zusammenhang nicht.

In der lokalen Uniformisierenden $z = e^{2\pi i\tau}$ schreibt sich $K(\tau,\sigma)$ nach (48) so:

$$K(\tau,\sigma) = 2\pi i \frac{e^{2\pi i\tau}}{e^{2\pi i\sigma} - e^{2\pi i\tau}} + \cdots.$$

Und es ist

$$K(\tau,\sigma)\,T_\tau = \sum_{i=1}^{d_\nu} K(\nu_i\tau,\sigma)\,\frac{(a_{\nu_i}d_{\nu_i} - b_{\nu_i}c_{\nu_i})^{\frac{n}{2}}}{(c_{\nu_i}\tau + d_{\nu_i})^n} + \cdots,$$

wo die Punkte eine Potenzreihe in $e^{2\pi i\sigma}$ andeuten. Die Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} K(\tau,\sigma)\,T_\tau &= -\frac{d\log\left(e^{2\pi i d_\nu\sigma} - e^{2\pi i(a_\nu\tau+b_\nu)}\right)}{d\,\frac{a_\nu\tau+b_\nu}{d_\nu}}\left(\frac{a_\nu}{d_\nu}\right)^{\frac{n}{2}} + \cdots \\ &= 2\pi i\,\frac{a_\nu^{n-1}}{(a_\nu d_\nu)^{\frac{n-2}{2}}}\,\frac{e^{2\pi i(a_\nu\tau+b_\nu)}}{e^{2\pi i d_\nu\sigma} - e^{2\pi i(a_\nu\tau+b_\nu)}} + \cdots. \end{aligned}$$

Das Residuum von $K_T(\tau)\,d\tau$ in $\tau = i\infty$ ist nun

$$\operatorname{Res}(\nu) = \begin{cases} 0, & a_\nu > d_\nu, \\ -\dfrac{a_\nu^{n-1}}{(1-\zeta(\nu)\,e^{-2\pi i b_\nu})\,(a_\nu d_\nu)^{\frac{n-2}{2}}}, & a_\nu \le d_\nu, \end{cases} \qquad \zeta(\nu) = \begin{cases} 1, & a_\nu = d_\nu, \\ 0, & a_\nu < d_\nu. \end{cases} \tag{57}$$

Jetzt läßt sich die Berechnung der Spur (51) in dem folgenden Rezept zusammenfassen:

Die Spur einer Korrespondenz (1. Formulierung). *Man bilde alle Matrizen $\nu = \varepsilon_1\nu_0\varepsilon_2$, ε_1 und ε_2 beliebig aus Γ, welche Fixpunkte τ_0 im Inneren oder auf dem Rande von $\mathfrak{T}$ haben, und zwar nehme man aus jeder Klasse*

konjugierter Elemente $\varepsilon^{-1}v\varepsilon$ je einen Vertreter. Die Spur von T als Operator im Modul aller automorphen Formen 1. Gattung eines geraden Grades $-n<-2$ ist dann die über v zu erstreckende Summe

$$s_n(T)=\sum_v \frac{1}{n_v}\operatorname{Res}(v), \tag{58}$$

deren Summanden in (54) *und* (57) *angegeben und folgendermaßen erklärt werden.*

Hat v zwei verschiedene Eigenwerte ϱ_v, ϱ_v^*, so denke man sich v als Matrix $v=\begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix}$ mit $c_v\neq 0$, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Ein Fixpunkt von diesem v ist dann $\tau_0=\frac{\varrho_v-d_v}{c_v}$. In (54) *hat man denjenigen Eigenwert zu nehmen, für den der so berechnete Fixpunkt τ_0 im Inneren von $\mathfrak{T}$ liegt. Liegt dagegen τ_0 für beide Eigenwerte ϱ_v, ϱ_v^* in $\mathfrak{T}$, so hat man entsprechend zwei Summanden in* (58) *einzusetzen, es sei denn, daß die beiden Fixpunkte τ_0, $\tau_0^*=\frac{\varrho_v^*-d_v}{c_v}$ bezüglich Γ äquivalent sind.*

Die Zahl n_v ist im allgemeinen gleich 1 zu nehmen, wenn der Fixpunkt keine Ecke $\mathfrak{e}_\lambda$ ist, sonst gleich der Ordnungszahl dieser Ecke.

Hat v nur einen einzigen Eigenwert, so kann man v in die Normalform (55) *transformieren, wobei a_v und d_v teilerfremde natürliche Zahlen sind. Zu einem solchen v gehört der Beitrag* (57).

Endlich stimmen die Spuren adjungierter Korrespondenzen überein:

$$s_n(T)=s_n(T^*).$$

Letzteres geht aus deren Definition (35) und (37) hervor.

5. Wir wollen das Berechnungsverfahren für die Spur von T noch anders formulieren, dabei aber die vereinfachende Annahme machen, daß keine Ecken und Spitzen vorhanden sind. Wegen (52) kann man (54) auch so schreiben:

$$\operatorname{Res}(v)=\left[\frac{1}{1-\dfrac{dv\tau}{d\tau}}\left(\frac{dv\tau}{d\tau}\right)^{n/2}\right]_{\tau=\tau_0}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch anders schreiben. Es sei z eine in einem Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ bzw. $\tau=\tau_0$ verschwindende lokale Uniformisierende. Ein Zweig der Korrespondenz T bildet nun die Umgebung von $z=0$ auf sich umkehrbar eindeutig und konform ab. Die Abbildungsfunktion $T(z)$ habe hier die Reihenentwicklung $T(z)=v_{\mathfrak{p}}z+v_{\mathfrak{p}}'z^2+\cdots$. Der Koeffizient $v_{\mathfrak{p}}$ ist nun ersichtlich invariant bei Übergang zu einer anderen Uniformisierenden; $v_{\mathfrak{p}}$ soll das *Verzerrungsverhältnis* heißen. Nimmt man speziell $z=\tau-\tau_0$, so ist

$$v_{\mathfrak{p}}=\left[\frac{dT(z)}{dz}\right]_{z=0}=\left[\frac{dv\tau}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0}.$$

Die Spur einer Korrespondenz (2. Formulierung). *Wenn keine Ecken und Spitzen vorhanden sind, so ist die Spur einer Korrespondenz T als Operator im Modul der automorphen Formen 1. Gattung eines geraden Grades $-n<-2$*

die über alle Fixpunkte $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}$ *erstreckte Summe*

$$s_n(T) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - v_{\mathfrak{p}}} v_{\mathfrak{p}}^{n/2}, \tag{59}$$

wo $v_{\mathfrak{p}}$ *das soeben erklärte Verzerrungsverhältnis im Punkte* $\mathfrak{p}$ *bedeutet.*

Dieses Verzerrungsverhältnis ist bei den hier betrachteten Korrespondenzen also niemals gleich 1. Man muß allerdings im Auge behalten, daß wir hier nicht die allgemeinsten Korrespondenzen studieren.

6. Die erhaltene Spurformel (58) gestattet noch eine Ergänzung und Umformung. Man wende die Gl. (41) in (49) an und kommt dann auf

$$s_n(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}^*} K_T^*(\tau)\, d\tau, \qquad K_T^*(\tau) = \sum_{j=1}^{d^*} K(\tau, \nu_j^* \tau) \frac{(c_{\nu_j^*} \tau + d_{\nu_j^*})^n}{(a_{\nu_j^*} d_{\nu_j^*} - b_{\nu_j^*} c_{\nu_j^*})^{n/2}},$$

wo die ν_j^* die in § 5, Nr. 2 erklärte Bedeutung haben. Bei der Berechnung der Pole von $K_T^*(\tau)$ kommen an Stelle der Substitutionen $\nu = \varepsilon_1 \nu_0 \varepsilon_2$ Substitutionen $\nu^* = \varepsilon_1 \nu_0^{-1} \varepsilon_2$ vor. Da ein gemeinsamer Faktor aller Koeffizienten ohne Einfluß ist, kann man für die ν^* gerade die Substitutionen $\nu^* = \begin{pmatrix} s(\nu) & 0 \\ 0 & s(\nu) \end{pmatrix} - \nu$ nehmen $\big(s(\nu) = \text{Spur von } \nu\big)$. Diese haben die gleichen Eigenwerte wie ν. Das Residuum von $K_T^*(\tau)$ an einer Stelle τ_0, welche Fixpunkt eines solchen ν^* ist, ist an Stelle von (54) jetzt

$$\operatorname{Res}(\nu^*) = \frac{1}{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\varrho_\nu^{n-1}}{\varrho_\nu^* - \varrho_\nu},$$

wenn $\varrho_\nu \neq \varrho_\nu^*$ war. Fallen dagegen die Eigenwerte von ν zusammen, so überlegt man sich im Anschluß an Nr. 3 mühelos, daß das Residuum von $K_T^*(\tau)$ in $\tau = i\infty$ dasselbe wie das von $K_T(\tau)$ ist.

Die Spur läßt sich demnach auch in der Gestalt

$$s_n(T) = -\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n_\nu} \frac{1}{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\varrho_\nu^{n-1} - \varrho_\nu^{*n-1}}{\varrho_\nu - \varrho_\nu^*} - \sum_{a_\nu \leq d_\nu} \frac{a_\nu^{n-1}}{(1 - \zeta(\nu) e^{-2\pi i b_\nu})(a_\nu d_\nu)^{\frac{n-2}{2}}}$$

schreiben. Nun ist aber

$$\frac{1}{(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\varrho_\nu^{n-1} - \varrho_\nu^{*n-1}}{\varrho_\nu - \varrho_\nu^*} = \frac{1}{|\nu|^{\frac{n-2}{2}}} (\varrho_\nu^{n-2} + \varrho_\nu^{n-3} \varrho_\nu^* + \cdots)$$

die Spur $s\big([\nu]^{n-2}\big)$ der in § 1, Nr. 2 erwähnten Darstellung $[\nu]^{n-2}$ der projektiven linearen Gruppe. Also ist endlich

$$s_n(T) = -\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n_\nu} s\big([\nu]^{n-2}\big) - \sum_{a_\nu \leq d_\nu} \frac{a_\nu^{n-1}}{(1 - \zeta(\nu) e^{-2\pi i b_\nu})(a_\nu d_\nu)^{\frac{n-2}{2}}}; \tag{60}$$

wegen der Bedeutung der benutzten Symbole muß auf den Zusammenhang verwiesen werden.

7. Durch eine leichte Überlegung läßt sich die Spurformel (58), (59), (60) so korrigieren, daß sie auch noch für $n = 2$ gilt. Für $n = 2$ ist die Behauptung von Nr. 2 falsch, doch sieht man, daß $K_0(\tau, \sigma) - K_0(\tau, \sigma)\,[\varepsilon]_\tau^{-n}$ eine in σ

überall holomorphe und bei der Gruppe Γ invariante Funktion ist. Sie hängt daher nur noch von τ ab. Aus dem Grunde sind $K_0(\tau,\sigma)-K_0(\tau,\sigma_0)$ und $[K_0(\tau,\sigma)\,T_\tau]_{\sigma=\tau}-K_0(\tau,\sigma_0)\,T$ für eine beliebige Konstante σ_0 automorphe Formen in τ des Grades -2; die letztere erfüllt wieder die Gl. (50). Wie oben ergibt sich jetzt an Stelle von (51):

$$s_n(T)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}} K_T(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}} K_0(\tau,\sigma_0)\,T\,d\tau. \tag{61}$$

Wegen (48) ist

$$K_0(\tau,\sigma_0)\,T=\sum_{i=1}^{d} K_0(\nu_i\tau,\sigma_0)\,\frac{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}{(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{\nu_i^{-1}\sigma_0-\tau}\,\frac{a_{\nu_i}d_{\nu_i}-b_{\nu_i}c_{\nu_i}}{(c_{\nu_i}\tau+d_{\nu_i})(-c_{\nu_i}\sigma_0+a_{\nu_i})}+\cdots=\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{\nu_i^{-1}\sigma_0-\tau}+\cdots,$$

wo die Punkte eine Potenzreihe in τ bedeuten. Folglich hat das zweite Integral den Wert d.

Im Falle $n=2$ hat man rechts in (58) *und* (59) *noch die durch* (32) *erklärte Zahl d, in* (60) $\frac{1}{2}(d+d^*)$ *hinzuzufügen.*

8. Zum Schluß bringen wir ein Beispiel. Es sei Γ die Modulgruppe und N eine quadratfreie natürliche Zahl. Die Modularkorrespondenz $T=T_N$ läßt sich dann in der Weise von § 5 erzeugen. Der Bereich $\mathfrak{T}$ ist die obere τ-Halbebene. Die Substitutionen, über die in (60) summiert wird, sind ganzzahlige Matrizen der Determinante N, welche entweder komplexe Eigenwerte haben (erste Summe), oder welche in die Gestalt (55) mit ganzen rationalen a_ν, b_ν, d_ν unimodular transformierbar sind (zweite Summe). Die ersteren ν haben also eine Spur $s=s(\nu)$, die zwischen $-2\,|\,N$ und $+2\,|\,N$ liegt. Die Anzahl der nicht konjugierten ν mit vorgegebener Spur ist gleich der Anzahl $h(s^2-4N)$ der Ringidealklassen für den quadratischen Zahlring mit der Diskriminante s^2-4N. Die Zahl n_ν ist die halbe Einheitenanzahl $e(s^2-4N)$ dieses Ringes, also $e(-3)=3$, $e(-4)=2$, $e(s^2-4N)=1$ in allen anderen Fällen. Die Spurformel (60) wird also

$$\left\{\begin{aligned} &s_n(T_N)=N^{\frac{2-n}{2}}\times\\ &\times\left[-\frac{1}{2}\sum_{s^2<4N}\frac{h(s^2-4N)}{e(s^2-4N)}\,\frac{\varrho_s^{n-1}-\varrho_s^{*\,n-1}}{\varrho_s-\varrho_s^*}-\sum_{\substack{t\mid N\\ t<\sqrt{N}}} t^{n-1}+\begin{cases}\sum_{t\mid N} t & \text{für } n=2,\\ 0 & \text{für } n>2\end{cases}\right]\end{aligned}\right. \tag{62}$$

mit $\varrho_s=\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2-4N}\right)$, $\varrho_s^*=\frac{1}{2}\left(s-\sqrt{s^2-4N}\right)$.

Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß (62) auch für nicht quadratfreies N gilt. Für eine Quadratzahl $N=M^2$ ist dagegen rechts in der Klammer noch $\frac{1}{2}M^{n-1}$ zu subtrahieren. Analoge Formeln für gewisse Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe haben eine ähnliche Bauart. Die Herleitung dieser Formeln macht keine besondere Mühe, da die Anzahlen der nicht konjugierten ν mit gleicher Spur bereits in einer früheren Arbeit [2] bestimmt wurden.

§ 7. Schlußbemerkungen

1. Zum Schluß sollen einige offene Fragen besprochen werden, die durch das Vorhergehende nahegelegt werden.

Wie ordnet sich im Falle $n = 2$ das Abelsche Theorem in diesen Zusammenhang ein? Es sei $\chi(\tau)\,d\tau$ ein Differential 3. Gattung und $\varphi(\tau)\,d\tau$ ein Differential 1. oder 2. Gattung, welches in den Singularitäten des ersteren holomorph ist. Man stellt leicht mittels des Cauchyschen Integralsatzes fest

$$I(\varphi, \chi) = \sum_i \alpha_i \int_{\mathfrak{p}_i}^{\mathfrak{q}_i} \varphi(\tau)\,d\tau,$$

dabei brauchen die Punkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ nicht notwendig verschieden zu sein. Die Bedeutung der Konstanten α_i ist die Folgende: Für einen Punkt $\mathfrak{p}$ bilde man die Summe $\sum \alpha_i - \sum \alpha_j = R_{\mathfrak{p}}$, erstreckt über alle $\mathfrak{p}_i$ und alle $\mathfrak{q}_j$, die mit $\mathfrak{p}$ identisch sind. Die Zahl $R_{\mathfrak{p}}$ ist dann das Residuum des Differentials $\chi(\tau)\,d\tau$ an der Stelle $\mathfrak{p}$. Die die Punkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ verbindenden Wege sind in der aufgeschnittenen Fläche $\mathfrak{R}$ zu wählen. Das Integral $I(\varphi, \chi)$ ist von der Art der Aufschneidung zu einem (oder mehreren) einfach zusammenhängenden Flächenstück abhängig. Setzt man voraus, daß $\chi(\tau)\,d\tau$ nur Pole mit ganzzahligen Residuen hat, so sind die α_i auch ganze Zahlen, und $I(\varphi, \chi)$ ist als Restklasse modulo den Perioden von $\int \varphi(\tau)\,d\tau$ eindeutig definiert. Es gilt folgende

Modifikation des Abelschen Theorems. *Ein Differential $\chi(\tau)\,d\tau$ mit ganzen rationalen Residuen ist dann und nur dann das Differential des Logarithmus einer meromorphen Funktion auf $\mathfrak{R}$, wenn für alle Differentiale $\varphi(\tau)\,d\tau$ 1. und 2. Gattung $I(\varphi, \chi) \equiv 0$ modulo den Perioden von $\int \varphi(\tau)\,d\tau$ ist.*

2. In der komplexen Multiplikation der singulären elliptischen Funktionen spiegeln sich wichtige Eigenschaften der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ in dem Modul der Perioden der gewöhnlichen Differentiale 1. Gattung. Gibt es Analoga dieses Sachverhalts, bei welchen die Perioden der Differentiale höheren Grades in Erscheinung treten? Diese Frage wird dadurch nahegelegt, daß nach § 2, Nr. 4 die Perioden bei geeigneter Wahl der Differentiale in dem Körper liegen, dem die Koeffizienten der Gruppe Γ angehören. Dieses ist bei Differentialen höheren Grades, deren Perioden ja Polynome sind, nicht trivial. Auch der Umstand, daß die Koeffizienten der bilinearen Periodenrelationen bis auf den gemeinsamen Faktor $(2\pi i)^{-1}$ ganz rational sind, legt es nahe, nach zahlentheoretischen Anwendungen zu suchen.

3. Wegen der eineindeutigen Zuordnung (§ 4, Nr. 3) von automorphen Formen 1. und 2. Gattung auf der einen Seite und Cohomologieklassen auf der anderen, ferner wegen der Möglichkeit (40), die Wirkung der Korrespondenzen auf die Cohomologieklassen direkt zu studieren, müßte die Spurformel (60) algebraisch beweisbar sein. Bekanntlich gestattet die für $n = 2$ gültige Modifikation von (60) (s. § 6, Nr. 7) in Gestalt des Lefschetzschen Fixpunktsatzes einen rein topologischen Beweis (s. hierzu [4]). Für $n > 2$ wäre die Homologietheorie durch die Cohomologietheorie zu ersetzen.

4. Es wurde bereits gesagt, daß sich unsere Überlegungen einem allgemeineren Gedanken von A. WEIL unterordnen. Das geschieht in folgender Weise. Es sei $\mathfrak{t}(\tau)$ eine Basis des Moduls der Polynome $(n-2)$-ten Grades in τ, als ein Spaltenvektor geschrieben. Es gilt dann mit einer Matrix $M(\varepsilon)$

$$M(\varepsilon)\,\mathfrak{t}(\tau) = \mathfrak{t}(\tau)\,[\varepsilon]^{n-2}.$$

Ist $\varphi(\tau)$ eine automorphe Form $(-n)$-ten Grades und 1. oder 2. Gattung, so genügt der Formenvektor $\mathfrak{f}(\tau) = \mathfrak{t}(\tau)\,\varphi(\tau)$ den Funktionalgleichungen

$$M(\varepsilon)^{-1}\mathfrak{f}(\tau)\,[\varepsilon]^{-2} = \mathfrak{f}(\tau), \qquad \varepsilon \in \Gamma. \tag{62}$$

Anstatt dessen kann man auch sagen: Das Differential $\mathfrak{f}(\tau)\,d\tau$ ist bei der Substitution ε und gleichzeitiger Multiplikation mit $M(\varepsilon)^{-1}$ invariant:

$$M(\varepsilon)^{-1}\mathfrak{f}(\varepsilon\tau)\,d\varepsilon\tau = \mathfrak{f}(\tau)\,d\tau, \qquad \varepsilon \in \Gamma.$$

Das Integral

$$\mathfrak{F}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathfrak{f}(\tau)\,d\tau \tag{63}$$

ist wegunabhängig. Bei Variablentransformation verhält es sich so:

$$M(\varepsilon)^{-1}\mathfrak{F}(\varepsilon\tau) = \mathfrak{F}(\tau) + \mathfrak{v}_\varepsilon, \qquad \varepsilon \in \Gamma,$$

wobei der (konstante) Periodenvektor $\mathfrak{v}_\varepsilon$ offenbar in einfacher Weise aus den Koeffizienten des Polynoms $\Omega_\varepsilon(\tau)$ berechnet wird. Die $\mathfrak{v}_\varepsilon$ genügen der zu (16) analogen Gleichung

$$\mathfrak{v}_{\varepsilon\eta} = M(\eta)^{-1}\,\mathfrak{v}_\varepsilon + \mathfrak{v}_\eta. \tag{64}$$

Die Theorie der Integrale (12) ist völlig gleichbedeutend mit der der Ideale (63). Letztere sind aber allgemeiner, da man sie für eine willkürliche Darstellung $M(\varepsilon)$ von Γ bilden kann. Man geht dabei von solchen Formenvektoren $\mathfrak{f}(\tau)$ aus, welche (62) mit dieser Darstellung erfüllen. Die Anzahlen der linear unabhängigen Differentiale $\mathfrak{f}(\tau)\,d\tau$ bekommt man aus WEILS Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes. Mit diesem hat man ein Werkzeug in der Hand, die Theorie der Integrale 1. und 2. Gattung im allgemeinsten Falle soweit zu führen, wie es hier in einem speziellen geschah.

Literatur

[1] BOL, G.: Invarianten linearer Differentialgleichungen. Abh. math. Seminar Hamburger Univ. **16**, 1—28 (1949). — [2] EICHLER, M.: Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen. J. reine u. angew. Math. **195**, 156—171 (1956). — [3] EICHLER, M.: On the class number of imaginary quadratic fields and the sums of divisors of natural numbers. J. Indian Math. Soc. **19**, 153—180 (1955). — [4] EICHLER, M.: Modular correspondences and their representations. Report of an international colloquium on zeta-functions, Bombay 1956. J. Indian Math. Soc. **20**, 163—206 (1956). — [5] PETERSSON, H.: Konstruktion der Modulformen ... von positiver reeller Dimension ... Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg **1950**, 417—494. — [6] WEIL, A.: Généralization des fonctions Abéliennes. J. Math. pures appl., IX. sér. **17**, 47—87 (1938). — [7] WEIL, A.: Über Matrizenringe auf Riemannschen Flächen und den Riemann-Rochschen Satz. Abh. math. Seminar Hamburger Univ. **11**, 110—115 (1936). — [8] SELBERG, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces. Loc. cit. [4], S. 47—87.

Marburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Oktober 1956)

Schmidt, J.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 299—302 (1957)

Einfacher, ordinalzahlfreier Beweis für die Wohlordnung der Mächtigkeiten

Von

Jürgen Schmidt

Unter den verschiedenen äquivalenten Formulierungen des Auswahlaxioms ist seiner Schmiegsamkeit in der Anwendung wegen das als Lemma von Zorn bekannte, letztlich auf Hausdorff zurückgehende Maximalprinzip[1]) in die Schlüsselposition gerückt; in der Tat lassen sich ja viele dieser Formulierungen, insbesondere das Auswahlaxiom selbst und der Zermelosche Wohlordnungssatz, als direkte Spezialisierungen des allgemeinen Maximalprinzips auffassen. Lange Zeit war hier eine gewisse Einschränkung zu machen gewesen, insofern die zahlreichen kardinalzahlarithmetischen Äquivalenzen für das Auswahlaxiom[2]), nach dem immer wieder reproduzierten Vorgang von Cantor, weniger auf dem allgemeinen Maximalprinzip als speziell auf dem Wohlordnungssatz und der Ordinalzahltheorie zu beruhen schienen; dahingestellt blieb, ob nicht auch etwa der Satz von der Vergleichbarkeit oder gar von der Wohlordnung der Mächtigkeiten den Charakter eines speziellen Maximalprinzips besäße[3]). So hatte man sich lange Zeit damit abgefunden[4]), daß diese und andere Fundamentalsätze aus der Theorie der abstrakten (strukturlosen) Mengen anscheinend nur auf dem Umwege über eine hinreichend ausgebaute Theorie gewisser strukturierter, eben der wohlgeordneten Mengen zu gewinnen seien; lange schien es bei der etwas paradoxen Situation bleiben zu sollen, daß das allgemeine Maximalprinzip — ein für die heutige Mathematik grundlegendes und, wie es scheint, unentbehrliches logisches Prinzip — zwar seine Elastizität, seine bequeme Anwendbarkeit in reicheren Strukturtheorien wie Algebra,

[1]) Der Terminus „Maximalprinzip", obwohl vielleicht sprachlich anstößig, scheint uns sachlich angemessener als etwa „Maximumprinzip"; behauptet wird die Existenz eines maximalen Elements, nicht eines Maximums.

[2]) Siehe Bachmann [*1*] p. 132ff., Formulierungen $(\mathfrak{A}_3)$—$(\mathfrak{A}_{13})$.

[3]) Auf eine direkte Herleitung der Vergleichbarkeit, ja der Wohlordnung der Mächtigkeiten aus dem Zornschen Lemma scheint bereits 1939 die Bemerkung von Bourbaki [*2*] p. 39 hinzudeuten: ... en utilisant le théorème de Zorn (et par suite l'axiome de choix), on démontre ... (die zitierten Sätze); jedenfalls hat diese Bemerkung von Bourbaki den Anstoß zu den beiden Noten [*4*] und [*5*] von Farah gegeben. Der Beweis, den die Bourbaki-Schule 17 Jahre später ausgeführt hat, ist allerdings wieder der klassische ([*3*] p. 56, Beweis von Théorème 1).

[4]) Aber nicht ohne Unbehagen; Fraenkel [*6*] p. 318 spricht von „the uneasiness caused by basing the comparability theorem upon the theory of order".

Topologie, Funktionalanalysis vollauf bewiesen hatte, in der allgemeinen Mengenlehre indes und damit letztlich der Logik selbst anscheinend weniger unmittelbaren Wert besaß[5]).

Den ersten Schritt zur Überwindung dieser Situation hat 1940 ZORN selbst getan; unter anderem hat er die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten auf die folgende, ebenso einfache wie natürliche Weise als einen Spezialfall seines berühmten Lemmas, des allgemeinen Maximalprinzips, dargestellt[6]):

Seien E und F irgendwelche Mengen; dann bezeichne $\mathsf{T}(E,F)$ die Menge aller eineindeutigen Abbildungen φ aus E, d.h. von einem Definitionsbereich $D(\varphi)\subseteqq E$, in F, d.h. auf einen Wertevorrat $W(\varphi)\subseteqq F$. Da diese Abbildungsmenge zumindest die leere Abbildung enthält, ist sie jedenfalls nicht leer. Sie wird (teilweise) geordnet durch die Relation $\varphi\subseteqq\psi$, φ Einschränkung von ψ, d.h. $D(\varphi)\subseteqq D(\psi)$ und $\varphi(x)=\psi(x)$ für jedes $x\in D(\varphi)$. Ist K eine Kette (total, d.h. einfach geordnete Teilmenge) in der so geordneten Menge $\mathsf{T}(E,F)$, so besitzt K darin eine obere Schranke, ja eine obere Grenze, nämlich die Vereinigung σ der Abbildungen $\varphi\in K$, deren Definitionsbereich $D(\sigma)$ und Wertevorrat $W(\sigma)$ übrigens gleich der Vereinigung der Definitionsbereiche $D(\varphi)$ bzw. Wertevorräte $W(\varphi)$ der $\varphi\in K$ ist. Die Ordnung von $\mathsf{T}(E,F)$ ist also induktiv[7]); nach dem allgemeinen Maximalprinzip[8]) existiert also in $\mathsf{T}(E,F)$ ein maximales Element μ. Dann ist aber $D(\mu)=E$ und damit μ eine eineindeutige Abbildung von E in F oder aber $W(\mu)=F$ und damit die Umkehrung μ^{-1} eine eineindeutige Abbildung von F in E; denn wäre weder das eine noch das andere der Fall, so ließe sich offenbar eine Transformation $\nu>\mu$ konstruieren, wider die Maximaleigenschaft von μ.

Genau dieser Beweis bildet dann 1952 den Inhalt einer Note von FARAH[9]). 1953 fügt FRAENKEL dem klassischen, Ordinalzahlen benutzenden Beweis des Vergleichbarkeitssatzes einen ordinalzahlfreien Beweis an, dessen Länge (von fast drei engbedruckten Seiten) allein dem Verzicht auf das allgemeine Maximalprinzip zuzuschreiben, dessen Kern aber mit dem Beweis von ZORN schlechthin identisch ist[10]). An den Beweis von ZORN schließlich hat 1955 SEKI ganz gewiß gedacht, als er den direkten Schluß vom allgemeinen Maximalprinzip auf den Vergleichbarkeitssatz als trivial und damit keiner Wiedergabe bedürftig bezeichnete[11]).

[5]) Besonders deutlich wird dieser Kontrast in den „Eléments de Mathématique" von BOURBAKI, die sich (s. Fußnote 3) gegenüber den Hauptsätzen der Kardinalzahltheorie völlig klassisch verhalten, während sie in den reicheren Theorien durch ausschließliche Verwendung des Zornschen Lemmas beträchtliche Beweisvereinfachungen erzielen und damit die Bedeutung dieses Prinzips besonders herausstellen.

[6]) ZORN [*9*] p. 11, (2.2).

[7]) BOURBAKI [*3*] p. 44ff.

[8]) BOURBAKI [*3*] p. 45, Théorème 2.

[9]) FARAH [*4*].

[10]) FRAENKEL [*6*] p. 319ff.

[11]) SEKI [*8*].

Der Zornsche Beweis für die Vergleichbarkeit läßt sich nun — und das ist der eigentliche Gegenstand dieser Mitteilung — mit geringfügigem technischem Aufwand sogar zum Beweis der Wohlordnung der Mächtigkeiten ausbauen. Daran scheint von den genannten Autoren niemand gedacht zu haben; ja FARAH leitet 1953 in einer zweiten Note die Wohlordnung der Mächtigkeiten aus dem Zornschen Lemma nur auf dem Umwege über den Wohlordnungssatz her und läßt damit praktisch alles beim alten[12]). Der direkte Schluß vom Zornschen Lemma auf die Wohlordnung der Mächtigkeiten ist, von allem Vorangegangenen unabhängig, erst 1954 HÖNIG gelungen[13]). Trotz der Eleganz und Kürze des Hönigschen Beweises ist vielleicht auch die folgende, ZORNS Gedanken aufgreifende Herleitung immer noch von Interesse; man wird diesen neuen Beweis vielleicht als, bei gleicher Kürze, nicht minder natürlich ansehen.

Wir betrachten also eine beliebige nichtleere (mindestens ein Glied enthaltende) Mengenfamilie $(E_i)_{i\in I}$. Es gibt wenigstens einen Index $i\in I$, wir dürfen also einen Index $j\in I$ ein für allemal auszeichnen. T sei das cartesische Produkt[14]) der sämtlichen wie oben induktiv geordneten Mengen $\mathsf{T}(E_j, E_i)$ $(i\in I)$. Dann ist auch T induktiv geordnet, und das Supremum einer Kette $K\subseteq T$ berechnet sich koordinatenweise. Jedem Element des Produkts — einer gewissen Familie $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}$ mit $\varphi_i\in\mathsf{T}(E_j, E_i)$ — entspricht eindeutig die Familie der Definitionsbereiche $D(\varphi_i)$ wie die der Wertevorräte $W(\varphi_i)$. Die Teilmenge S von T bestehe nun aus denjenigen Familien (φ_i), bei denen die Familie der Definitionsbereiche $D(\varphi_i)$ konstant ist, also alle $D(\varphi_i)$ gleich ein und derselben Teilmenge von E_j sind; man kann diese eindeutig bestimmte Teilmenge von E_j dann auch als den Definitionsbereich $D(\varphi)$ der Familie $\varphi=(\varphi_i)$ bezeichnen. Offenbar ist auch die Menge $S\subseteq T$ induktiv: das in T genommene Supremum einer Kette $K\subseteq S$ liegt immer noch in S, ist also obere Schranke, ja obere Grenze von K in S. Nach dem Maximalprinzip besitzt also die Menge S ein maximales Element $\mu=(\mu_i)$. Dann muß aber einer der beiden folgenden Fälle eintreten: es ist 1. $D(\mu)=E_j$ und damit μ_i eine eineindeutige Abbildung von E_j in E_i $(i\in I)$, E_j also die im Sinne der Mächtigkeit kleinste unter den Mengen E_i; oder 2. für wenigstens einen Index $k\in I$ gilt $W(\mu_k)=E_k$, wodurch die Hintereinanderausführung $\mu_i\cdot\mu_k^{-1}$ der Abbildungen μ_k^{-1} und μ_i eine eineindeutige Abbildung von E_k in E_i, E_k also die kleinste unter den Mengen E_i wird. Wäre weder das eine noch das andere der Fall, wäre also $D(\mu)\subset E_j$ und (für jedes $i\in I$) zugleich $W(\mu_i)\subset E_i$, so ließe sich, unter abermaliger Benutzung des Maximalprinzips in der speziellen Form des Auswahlaxioms, eine Familie $\nu\in S$ mit $\nu\supset\mu$ finden, wider die Maximaleigenschaft von μ.

---

[12]) FARAH [5].

[13]) HÖNIG [7].

[14]) Auch direktes oder (BIRKHOFF) kardinales Produkt: Menge der Auswahlfunktionen in koordinatenweiser Anordnung; s. BOURBAKI [3] p. 71.

Literatur

[1] BACHMANN, H.: Transfinite Zahlen. Berlin 1955. — [2] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles (fascicule de résultats). Actual. Sci. Industr., 1. Aufl. **846** (1939); 2. Aufl. **1141** (1951). — [3] BOURBAKI, N.: Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers. Actual. Sci. Industr. **1243** (1956). — [4] FARAH, E.: Über die Totalordnung der Menge der Mächtigkeiten der Teilmengen einer gegebenen Menge. (Portugiesisch.) Bol. Soc. Mat. São Paulo **5**, 59—61 (1952). — [5] FARAH, E.: Sur le bon ordre de l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble donné. Summa Brasil. Math. **3**, 37—42 (1953). — [6] FRAENKEL, A. A.: Abstract set theory. Amsterdam 1953. — [7] HÖNIG, CH. S.: Proof of the well-ordering of cardinal numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 312 (1954). — [8] SEKI, S.: On transfinite inferences. Comment. Math. Univ. St. Pauli **4**, 43—45 (1955). — [9] ZORN, M.: Idempotency of infinite cardinals. Univ. Calif. Publ. Math. **2**, 9—12 (1944).

Köln, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 17. November 1956)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

XCI. Band: Primzahlverteilung

Von Dr. **Karl Prachar,** Dozent an der Universität Wien. Etwa 464 Seiten Gr.-8°. 1957. Etwa DM 57.—; Ganzleinen DM 59.90

Inhaltsübersicht: Elementare Ergebnisse. — Siebmethoden. — Der Primzahlsatz. — Primzahlen in einer arithmetischen Reihe. — Verschiedene Anwendungen. — Das Goldbachsche Problem. — Funktionentheoretische Eigenschaften der L-Funktionen. Explizite Formeln und deren Anwendungen. — Trigonometrische Summen. — Sätze über die Dichte der Nullstellen der L-Funktionen und ihre Anwendung in der Primzahltheorie. — Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Reihe. — Anhang. — Literatur- und Sachverzeichnis.

Das vorliegende Buch, welches teilweise aus der Vorlesungstätigkeit des Verfassers hervorgegangen ist, will eine Einführung in die moderne Entwicklung der Theorie von der Verteilung der Primzahlen geben. Viele wichtige Primzahlprobleme, die in den letzten 20 Jahren gelöst werden konnten, haben bisher noch keine lehrbuchmäßige Darstellung erfahren. Die Darstellung beginnt mit den elementarsten Resultaten und führt bis zu dem Beweis des berühmten Satzes von Linnik über die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Reihe. Es wurde sowohl versucht, überall die besten bis heute bekannten Resultate zu geben, als auch die Methoden genau zu erläutern, in der Hoffnung, daß dadurch ein weiterer Kreis von Lesern für die Lösung der so zahlreichen noch ungelösten Probleme gewonnen wird.

XCII. Band: Tabellen zur Fourier Transformation

Von Dr. **F. Oberhettinger,** Professor der Mathematik, American University, Washington, D.C., USA. X, 214 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 35.80; Ganzleinen DM 39.50

Inhaltsübersicht: Fourier-Kosinus-Transformationen. — Fourier-Sinus-Transformationen. — Exponentielle Fourier-Transformationen. — Anhang: Zusammenstellung von Abkürzungen und Definitionen der Funktionssymbole. — Literatur.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physik

Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. Von Dr. **Christian Gerthsen,** Professor an der Technischen Hochschule, Direktor des Physikalischen Instituts, Karlsruhe. Vierte Auflage. Mit 647 Abbildungen. XV, 545 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 29.80

Aus den Besprechungen: Das Lehrbuch der Physik von Gerthsen ist aus den Bedürfnissen des Physikunterrichtes in den Nachkriegsjahren hervorgegangen, um den drückenden Mangel an neuen Lehrbüchern der Physik überwinden zu helfen. Es war ursprünglich nicht als selbständiges Lehrbuch gedacht, sondern als Ergänzung der großen Vorlesung über Physik. Doch hat es sich über den Kreis der Studierenden der Physik hinaus dank seiner vorbildlich klaren Darstellung viele Freunde und Anerkennung erworben bei Hochschullehrern und bei in der Praxis stehenden Physikern, Chemikern und Ingenieuren. Das Buch führt den Leser durch das gesamte Stoffgebiet der Physik bis zum heutigen Stand unseres elementaren physikalischen Wissens. Verhältnismäßig viel Platz wird der Optik und der Atomphysik eingeräumt, da diese heute so wichtigen Gebiete in der allgemeinen Vorlesung meist etwas zu kurz kommen. Besondere Sorgfalt wird der mathematischen Formulierung der Theorie gewidmet, um deren Anschaulichkeit der Verfasser sich bemüht. Eine sehr große Zahl klarer Abbildungen vermögen den notwendigerweise gedrängten Text durch ihre Anschaulichkeit und ihren Inhalt vorzüglich zu ergänzen. Das vom Verlag einwandfrei ausgestattete Buch kann den Studierenden der Physik zum Gebrauch neben den Vorlesungen, aber auch dem im Berufsleben Stehenden, der sich über irgendeine physikalische Frage rasch und zuverlässig orientieren möchte, empfohlen werden.

„Technische Rundschau"

Physik des täglichen Lebens

Eine Anleitung zu physikalischem Denken und zum Verständnis der physikalischen Entwicklung. Von Dr. rer. nat. **Walther Gerlach,** o. ö. Professor für Experimentalphysik, Vorstand des I. Physikalischen Instituts, München. VII, 187 Seiten Gr.-8°. 1957.

Englische Broschur DM 12.60

Inhaltsübersicht: Der atomistische Bau der Materie. — Die Atomistik der Elektrizität. — Bau und Energie der Atomkerne. — Die elektromagnetische Strahlung. — Die Atomistik der Strahlung.

Kurzes Lehrbuch der Physik

Von Dr. **H. A. Stuart,** o. Professor für chem. Physik an der Universität Mainz, früher Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Dresden. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 380 Abbildungen. VII, 304 Seiten Gr.-8°. 1954.

Ganzleinen DM 19.80

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany